

# 利用 Delaunay 细分进行噪声点云曲面重建

李国俊<sup>1,2</sup> 李宗春<sup>1</sup> 孙元超<sup>1</sup> 李伟<sup>1</sup> 黄志勇<sup>3</sup>

1 信息工程大学地理空间信息学院,河南 郑州,450052

2 北京卫星导航中心,北京,100094

3 中国天绘卫星中心,北京,102102

**摘要:**针对噪声点云曲面重建,提出了一种基于 Delaunay 细分的曲面重建算法。首先以点云法向为约束,采用抗差估计的方法拟合球面近似局部曲面;然后利用沿坐标轴的包围盒树结构(axis aligned bounding boxes tree, AABB-tree)快速搜索与线段相交的曲面包围球,以各包围球球心为初值、半径为可信区间,并行化迭代计算出线段与球面的首个交点,该交点可近似为线段与曲面交点;最后不断地插入交点进行 Delaunay 细分,从而网格化曲面。实验结果表明,当点云噪声较大时,该方法可以快速、稳健地重建出高质量曲面,且曲面重建精度较高。

**关键词:** Delaunay 细分;球面拟合;噪声点云;曲面重建

**中图法分类号:** P237.3; TP751 **文献标志码:** A

随着三维激光扫描技术的发展,获取物体海量点云已更加便捷、快速。但是,由于各种因素的影响,原始点云并非理想点云数据。虽然点云预处理技术能够在一定程度上提高点云质量,但仍可能存在部分缺陷,例如点云噪声、拼接误差、点云欠采样等。因此,研究噪声点云的曲面重建仍然十分必要。

根据重建曲面和数据点之间的关系,可将曲面重建方法分为插值法和逼近法两大类<sup>[1]</sup>。

插值法重建曲面完全通过原始数据点,主要包括两种方法:(1)基于 Delaunay 三角化方法<sup>[2-3]</sup>。该方法首先对点云进行 Delaunay 三角剖分,然后根据一定的拓扑准则抽取与原始曲面同胚的受限 Delaunay 三角形(restricted Delaunay triangle, RDT)。(2)基于区域生长方法<sup>[4-6]</sup>。该方法按照特定准则,不断选择新点加入当前区域边界,生成新三角形并更新边界,直到遍历所有点得到初始剖分,最后优化初始剖分。由于插值法完全通过数据点,当原始点云噪声较大时,则很难保证曲面重建精度。

逼近法重建曲面不一定通过原始数据点,主要分为三种:(1)局部拟合法<sup>[7-9]</sup>。首先利用邻域点进行局部几何体拟合,然后通过反复迭代投影逼近原始曲面,最后提取隐函数的等值面即为待

重建曲面。该方法具有一定的抗噪性,但点云噪声较大时,容易出现过度拟合导致错误曲面特征。(2)全局函数法<sup>[10-11]</sup>。利用法向或协方差矩阵等与曲面微分的关系建立全局能量模型,并求解出采样点函数值使得目标函数最大化。该方法可以抵抗少量离群点的影响,但是容易出现局部过度平滑现象。(3)距离函数法<sup>[12-13]</sup>。利用点到点的距离建立稳健的无符号距离场,并根据距离函数属性判断其符号。该方法可以抵抗离群点影响,但是重建精度较低,且对点云密度要求较高。

根据上述分析,本文提出了一种基于 Delaunay 细分(Delaunay refinement, DR)的曲面重建算法。该算法通过局部球面拟合克服点云噪声影响,利用沿坐标轴的包围盒树结构(axis aligned bounding boxes tree, AABB-tree)和并行化技术快速计算线段与曲面交点,最后采用 Delaunay 细分方法可以生成不同分辨率曲面。

## 1 算法原理

利用 Delaunay 细分进行曲面重建方法的关键在于如何准确、快速计算出线段与曲面的交点。为了确保精度,采用以法向为约束的拟合球面近似局部曲面,在选取权函数时,采用抗差迭代

法,克服了不同质量点云权重的不确定性。为了提高速度,对曲面包围球进行 AABB-tree 分割,快速查找与线段相交的包围球,针对各包围球,并行化迭代计算出线段与曲面的近似交点。本文算法流程如图 1 所示。

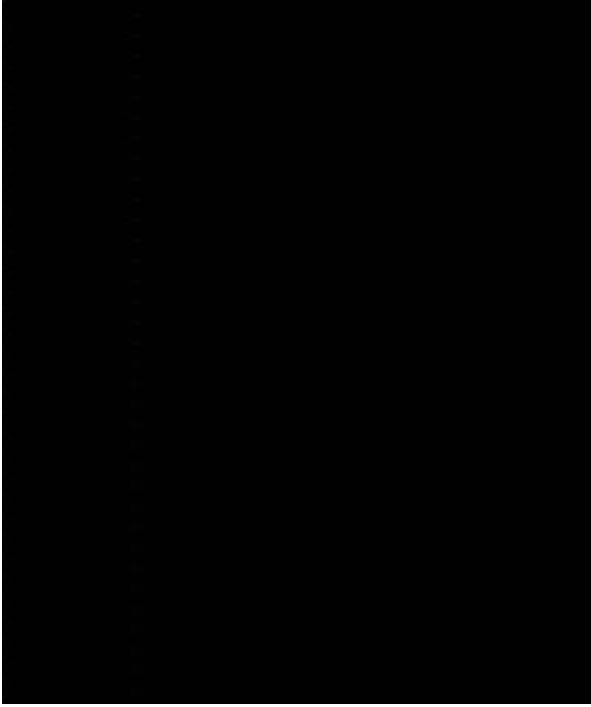


图 1 本文算法流程图

Fig. 1 Flowchart of the Proposed Algorithm

### 1.1 球面拟合

球面拟合方法主要分为两类:(1)几何法<sup>[14]</sup>。其准则是所有点到拟合球面的距离平方和最小。一般采用线性化迭代最小二乘求解,若初值给定不准确,容易出现迭代发散或陷入局部最优的情况。当拟合曲面接近平面时,目标函数不一定收敛于最小值。(2)代数法<sup>[15]</sup>。根据采样点建立隐函数,其零等值面即为拟合球面。该方法计算简单、速度快且适合平面模型。

一般球面代数方程可表示为:

$$f(\mathbf{x}) = [\mathbf{I} \quad \mathbf{x}^T \quad \mathbf{x}^T \mathbf{x}] \mathbf{u}(\mathbf{x}) = 0 \quad (1)$$

式中,  $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = [\mathbf{u}_0 \quad \mathbf{u}_1 \quad \mathbf{u}_2]^T$  表示代数球面系数;  $f(\mathbf{x})$  表示点  $\mathbf{x}$  到拟合球面的距离场函数,其梯度方向与点法向相等。

$$\mathbf{n}(\mathbf{x}) = \nabla f(\mathbf{x}) = [\mathbf{I} \quad \mathbf{x} \quad \mathbf{x}^T \mathbf{x}] \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}) + [\mathbf{0} \quad \mathbf{I}_3 \quad 2\mathbf{I}_3 \mathbf{x}] \mathbf{u}(\mathbf{x}) \quad (2)$$

式中,  $\nabla$  表示一阶导数;  $\mathbf{I}_3$  表示 3 阶单位阵。实际上,式(2)可近似表示为:

$$\mathbf{n}(\mathbf{x}) \approx [\mathbf{0} \quad \mathbf{I}_3 \quad 2\mathbf{I}_3 \mathbf{x}] \mathbf{u}(\mathbf{x}) \quad (3)$$

由式(3)可知,以法向为约束进行球面拟合,其主要优点是拟合方程为线性方程,通过简单的点坐

标与法向运算便可得到球面方程系数。以法向偏差最小化为目标函数,球面拟合法方程可表示为:

$$\begin{bmatrix} \sum \omega_i(\mathbf{x}) \mathbf{I}_3 & 2 \sum \omega_i(\mathbf{x}) \mathbf{p}_i \\ (2 \sum \omega_i(\mathbf{x}) \mathbf{p}_i)^T & 4 \sum \omega_i(\mathbf{x}) \mathbf{p}_i^T \mathbf{p}_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum \omega_i(\mathbf{x}) \mathbf{n}_i \\ 2 \sum \omega_i(\mathbf{x}) \mathbf{p}_i^T \mathbf{n}_i \end{bmatrix} \quad (4)$$

式中,  $\mathbf{p}_i$ 、 $\mathbf{n}_i$ 、 $\omega_i(\mathbf{x})$  分别表示参与拟合点坐标、法向和权重。进一步解算可得:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_2 &= \beta \frac{\sum \omega_i \mathbf{p}_i^T \mathbf{n}_i - \sum \tilde{\omega}_i \mathbf{p}_i^T \sum \omega_i \mathbf{n}_i}{2(\sum \omega_i \mathbf{p}_i^T \mathbf{p}_i - \sum \tilde{\omega}_i \mathbf{p}_i^T \sum \omega_i \mathbf{p}_i)} \\ \mathbf{u}_1 &= \sum \tilde{\omega}_i \mathbf{n}_i - 2\mathbf{u}_2 \sum \tilde{\omega}_i \mathbf{p}_i \\ \mathbf{u}_0 &= -\mathbf{u}_1^T \sum \tilde{\omega}_i \mathbf{p}_i - \mathbf{u}_2 \sum \tilde{\omega}_i \mathbf{p}_i^T \mathbf{p}_i \end{aligned} \quad (5)$$

式中,  $\tilde{\omega}_i = \omega_i / \sum \omega_j$ ;  $\beta$  表示场函数尺度系数,通过调整  $\beta$  可以平衡拟合点与拟合法向的权重。为保证  $\|\nabla f(\mathbf{x})\|$  与点法向长度一致,本文限定  $\|\nabla f(\mathbf{x})\| = 1$ ,即

$$\mathbf{u}_1^T \mathbf{u}_1 - 4\mathbf{u}_0 \mathbf{u}_2 = 1 \quad (6)$$

拟合球面与原始曲面的近似程度主要受两个因素影响:

1) 邻域点。邻域点过多或过少容易导致过度平滑或产生错误细节特征。常用的邻域点有球邻域点、 $k$ -邻域点、基于密度邻域点和基于曲率邻域点。为了兼顾效率与最优化邻域点,本文根据点云密度确定邻域点:

$$\mathbf{h}_p = \{ \mathbf{q} \mid \|\mathbf{p} - \mathbf{q}\| \leq \lambda \|\mathbf{q} - N_k(\mathbf{q})\|_{\max} \} \quad (7)$$

式中,  $\mathbf{h}_p$  为点  $\mathbf{p}$  的邻域点;  $N_k(\mathbf{q})$  表示  $\mathbf{q}$  的  $k$ -邻域点集合;  $\lambda$  表示球域影响因子,随着  $\lambda$  不断增大,  $\mathbf{h}_p$  不断增加。通过调整  $k$  与  $\lambda$  可适应不同密度点云,可以有效减弱点云噪声影响。

2) 权函数。在点云法向求解中,可能存在部分点法向不准确或方向不一致,选择合理的权函数可以弥补点云法向缺陷。目前,常用的权函数有高斯权函数和近似高斯权函数,此类权函数在一定程度上能够优化拟合结果,但对粗差数据较为敏感。本文采用抗差估计的 IGG3<sup>[16]</sup> 方案不断地对点云法向重新定权。

$$\omega_i = \begin{cases} \omega_i, & |\bar{v}_i| \leq k_0 \\ \omega_i \frac{k_0(k_1 - |\bar{v}_i|)}{|\bar{v}_i|(k_1 - k_0)}, & k_0 \leq |\bar{v}_i| \leq k_1 \\ 0, & |\bar{v}_i| \geq k_1 \end{cases} \quad (8)$$

式中,  $|\bar{v}_i| = |\mathbf{v}_i| / \sigma_0$  为标准化残差分量;  $\sigma_0$  为中误差;  $k_0$ 、 $k_1$  为模型参数,取值在 1.0~1.5 和 2.5

~8.0 之间。本文取  $k_0=1.0, k_1=2.5, \omega_0=1.0$ , 一般经过 2~3 次迭代便可有效剔除粗差数据。

### 1.2 线段与曲面交点

计算线段  $l$  与曲面  $S$  的交点  $r$  即求解线段  $l$  与局部拟合球面  $s$  的交点。类似于移动最小二乘法(moving least square, MLS)<sup>[7]</sup> 迭代投影的过程,本文采用迭代计算线段与球面交点的方法逼近真实交点。理论上,随着迭代次数增加,  $|f(r_i)|$  不断减小,交点  $r_i$  越来越逼近直线  $l$  与曲面  $S$  的真实交点<sup>[17]</sup>,如图 2 所示。



图 2 线段与曲面交点

Fig. 2 Segment-Surface Intersection

算法具体流程如下:

- 1) 给定点  $r$  的初始值  $r_0$ , 利用点  $r$  的邻域点拟合球面  $s$ 。
- 2) 计算直线  $l$  与拟合球面  $s$  的交点  $r_1$ , 若存在两个交点, 则取其中点。
- 3) 令  $r=r_1$ , 重复(1)、(2), 直到  $\|r_i-r_{i-1}\| \leq \epsilon, \|r_i-r_0\| \leq d$  或  $i>t$ 。

其中,  $\epsilon=1 \times 10^{-7}, t=4$ 。步骤(3)要求  $\|r_i-r_0\| \leq d$ , 主要是为了清除偏离点  $r_0$  过大的明显错误交点。

为了快速获取点  $r_0$ , 采用以点  $p_i$  为球心、 $\rho_i$  为半径的球面  $B_i$  包围曲面  $S$ ,  $\rho_i$  表示可能包含点  $r$  的球形半径, 一般取值为点  $p_i$  至第 5~8 邻近点的距离。显然, 当  $\rho_i$  足够大时, 若直线  $l$  与曲面  $S$  相交, 则必定与  $\sum B_i$  相交, 如图 3 所示。

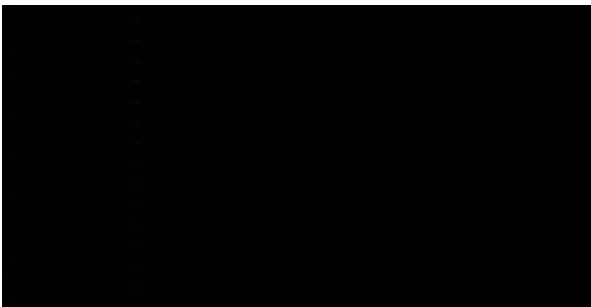


图 3 AABB-tree 球面索引

Fig. 3 Sphere Searching with AABB-tree

将所有的球面以空间包围盒形式进行 AABB-tree 分割, 可快速获取与直线  $l$  相交的球面。一般存在多个与线段相交的球面, 且各球面相互独立, 因此可进行并行化运算。与多项式局部曲面拟合相比, 采用球面拟合更适合计算线段与曲面的交点, 无需迭代运算、速度更快, 且拟合精度与二次多项式情形相当。

### 1.3 Delaunay 细分

当点云密度足够时, Delaunay 细分方法可得到受限 Delaunay 三角面, 该三角面与原始曲面同胚<sup>[18]</sup>。每个受限 Delaunay 三角形都有一个曲面 Delaunay 球, 该球以对偶的 Voronoi 边与曲面交点为球心, 外接受限 Delaunay 三角形, 曲面 Delaunay 球内不包含其他任何采样点, 如图 4 所示。

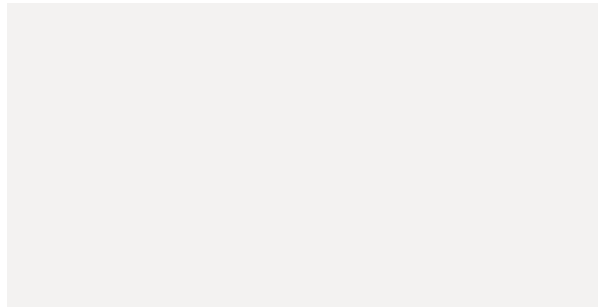


图 4 Delaunay 细分

Fig. 4 Delaunay Refinement

Delaunay 细分方法首先从原始点云中随机选取部分点进行 Delaunay 剖分, 然后不断插入新的 Voronoi 边与曲面交点, 直到所有三角形的曲面 Delaunay 球满足以下 3 个条件:

- 1) 角度条件。球内的受限 Delaunay 三角形角度都大于  $\alpha_a$ 。
- 2) 半径条件。球半径小于  $\alpha_r$ 。
- 3) 距离条件。球心到受限 Delaunay 三角形距离小于  $\alpha_d$ 。

其中,  $\alpha_a$  一般取值  $10^\circ \sim 30^\circ$ ,  $\alpha_r$  与  $\alpha_d$  取为若干倍  $d_{den} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \|p_i - q_j^i\|)$ ;  $q_j^i$  为点  $p_i$  的  $k$ -邻域点,  $k$  取值 6~12。当  $\alpha_r \approx \alpha_d$  时, 生成的三角面具有较高的质量。

与移动立方体(marching cubes, MC)算法<sup>[19]</sup>相比, Delaunay 细分方法只需计算线段与曲面交点, 且具有严格的理论证明, 生成的三角面质量较高, 但是该方法不适合处理曲面尖锐特征处, 主要是尖锐特征处点云密度难以保证。

## 2 实例分析

为验证本文算法的有效性,利用 CGAL 库<sup>[20]</sup>在 Win 7 系统、Intel Core2 T6670 CPU @ 2.2 GHz 的计算机上实现了本文算法。实验点云数据为兔子(362 272 个点),并在此基础上增加三组标准差为 0.4% 点云包围盒半径(bounding box radius, BBR)、0.7% BBR、1.0% BBR 的模拟高斯噪声点云数据。几种不同算法曲面重建效果如图 5 所示。

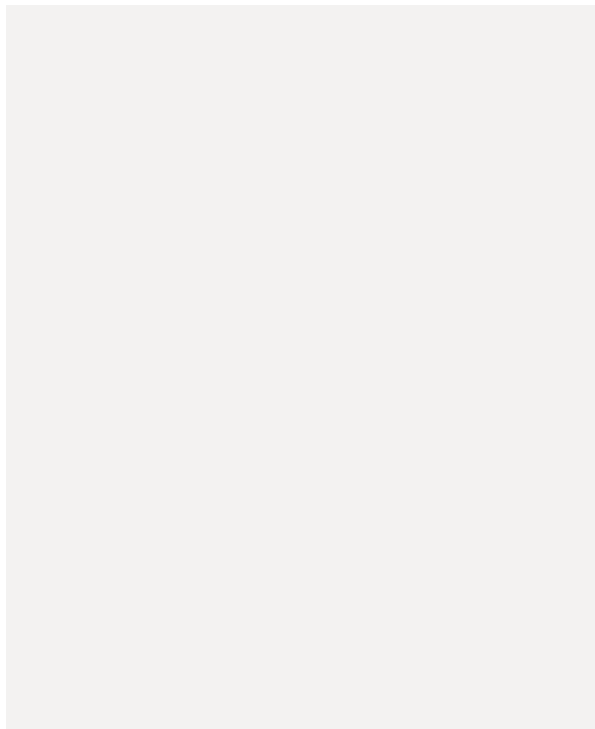


图 5 噪声点云曲面重建

Fig. 5 Noisy Point Clouds Surface Reconstruction

从图 5 可以看出,当标准差大于 0.4% BBR 时,Power Crust 算法和 Robust Cocone 算法无法准确地重建出完整曲面,APSS、泊松算法和本文算法的重建曲面为 2-流形面且具有较高的重建质量。

进一步对比 APSS 算法、泊松算法和本文算法的曲面重建精度。由于 362 272 个点的兔子点云含有一定噪声,若采用该点云作为参考点云,原始点云自身的噪声可能影响分析结果。因此,采用无噪声的 35 947 个点的兔子点云作为参考点云更为合理,如图 6 所示。

当标准差为 1.0% BBR 时,三种算法曲面重建偏差图如图 7 所示。

从图 7 可以看出,在高曲率区域,如兔子的脖子、尾巴和耳朵等处,APSS 算法和本文算法的偏差明显小于泊松算法,这主要是在高曲率区域,



图 6 噪声与理想兔子点云

Fig. 6 Noisy and Free Bunny Point Cloud

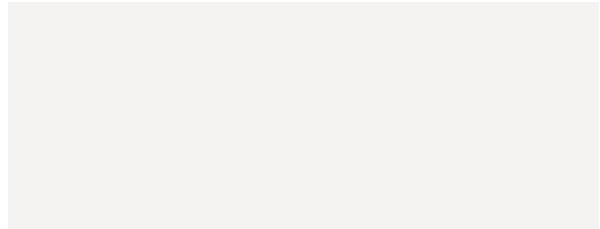


图 7 重建曲面偏差图

Fig. 7 Surface Reconstruction Errors

采用拟合球面可以更准确地逼近原始曲面。在平滑区域,点云法向估计较为准确,3 种算法的曲面重建精度相当。

与 MC 算法提取等值面不同,本文采用 Delaunay 细分方法生成的三角面质量更高。文献[21]给出了一种常用的三角面质量评价方案。

$$Q = \frac{\sqrt{12}}{d_{\max}} \sqrt{\frac{\prod_{i=1}^3 (\bar{d} - d_i)}{\bar{d}}}, 0 < Q \leq 1 \quad (9)$$

式中, $d_i$  表示三角形第  $i$  条边长; $d_{\max}$  表示最长的边长; $\bar{d} = \sum d_i / 2$ 。 $Q$  越大表示三角面越接近等边三角形,即三角面质量越高。

APSS 和本文算法重建三角面质量分布如图 8 所示。

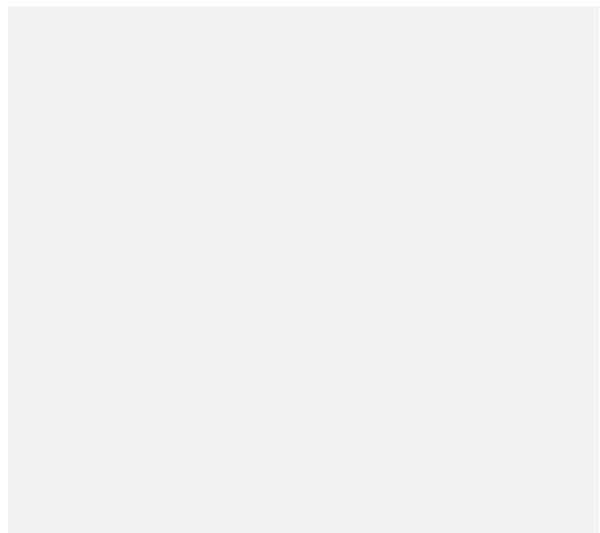


图 8 三角面质量分布

Fig. 8 Triangle Quality Proportion

从图 8 中可以看出,本文算法生成的三角面质量明显优于 APSS,且不存在尖锐三角面。

最后,利用 Riegl VZ400 扫描仪实测某雕像,并利用本文算法进行曲面重建,如图 9 所示。

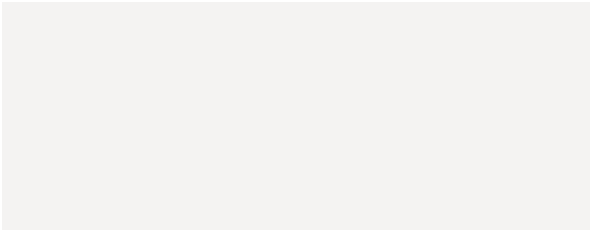


图 9 某雕像曲面重建

Fig. 9 Status Surface Reconstruction

从图 9(c)中可以看出,重建曲面的三角面质量较高,且点云密度均匀。图 9(b)中部分区域点云密度过高,导致球面拟合的邻域很小,该区域的曲面细节特征更为明显。因此,当点云密度与曲面曲率成正比时,本文算法的曲面重建效果更为理想。

进一步验证本文算法较泊松算法在曲面重建精度方面的优越性,结果如图 10 所示。



图 10 雕像偏差图

Fig. 10 Statue Errors

从图 10 中可以看出,本文算法曲面重建精度明显优于泊松算法曲面重建,但是在多站点云拼接处,如雕像中线、左侧胸口处等,明显存在精度差异。因此,在点云数据采集及预处理阶段,应尽量保证点云密度一致、精度相当、拼接准确。

本文算法曲面重建效果与部分参数设置密切相关,具体情况如表 1 所示。表 1 中,  $V_b$ 、 $V_c$  表示重建前后点个数,  $F$  表示重建三角面个数。随着点云噪声不断增大,需要逐步增大  $\lambda$  以确保拟合球面的邻域足够大。此时,在迭代计算线段与曲面交点时,近似交点将被更多的曲面包围球包含,大量球面搜索将会极大增加算法耗时。因此,当重建三角面个数相当时,随着点云噪声不断增大,本文算法耗时将不断增大,如表 2 所示。

表 1 本文算法参数

Tab. 1 Algorithm Parameters

	0	0.4%	0.7%	1.0%	雕像
$k$	15	15	15	15	15
$\lambda$	1.10	1.70	2.00	2.50	1.25
$\alpha_a$	10	10	10	10	10
$\alpha_r$	2.32	2.01	1.74	1.56	1.50
$\alpha_d$	2.32	2.01	1.74	1.56	1.50
$V_b$	362 272	362 272	362 272	362 272	930 730
$V_c$	40 377	40 598	41 258	41 311	265 429
$F$	80 453	80 949	82 285	82 444	526 425

表 2 曲面重建耗时/s

Tab. 2 Surface Reconstruction Time/s

	0	0.4%	0.7%	1.0%	雕像
APSS	190.3	290.8	416.3	626.1	-
泊松算法	31.8	33.1	33.7	33.4	109.5
本文算法	136.6	226.5	407.1	747.7	535.8

从表 2 中可以看出,当点云噪声较小时,本文算法的曲面重建耗时略低于 APSS。随着点云噪声不断增大,本文算法的曲面重建耗时迅速增加,高于 APSS。泊松算法的耗时不受点云噪声影响,明显低于 APSS 和本文算法。一般情况下,本文算法的耗时随着  $\alpha_r$  的减小呈平方倍数增加,所生成的三角面数量也呈平方倍数增加。

### 3 结 语

本文针对噪声点云提出了一种基于 Delaunay 细分的曲面重建算法,利用不同噪声水平的模拟数据,从曲面重建精度和质量角度,对比了 Power Crust 算法、Robust Cocone 算法、APSS 算法、泊松算法和本文算法的曲面重建效果。结果表明,当点云噪声较大时,Power Crust 算法和 Robust Cocone 算法重建曲面失败,本文算法较泊松算法和 APSS 算法分别在曲面重建精度和质量上具有一定的优势。

### 参 考 文 献

[1] Zhu Dehai. Point Cloud Library PCL Learning Tutorial [M]. Beijing: Beihang University Press, 2012, 359-360(朱德海. 点云库 PCL 学习教程[M]. 北京:北京航空航天大学出版社, 2012, 359-360)

[2] Amenta N, Choi S, Kolluri R K. The Power Crust, Unions of Balls, and the Medial Axis Transform[J]. *Computational Geometry*, 2001, 19(2): 127-153

[3] Dey T K, Goswami S. Provable Surface Reconstruction from Noisy Samples[C]. The Twentieth Annual Symposium on Computational Geometry,

- Brooklyn, NY, 2004
- [4] Kuo C, Yau H. A Delaunay-Based Region-Growing Approach to Surface Reconstruction from Unorganized Points[J]. *Computer-Aided Design*, 2005, 37(8): 825-835
- [5] Zhang Jianqing, Li Cailin, Guo Baoyun. A Fast Surface Reconstruction Algorithm for Unorganized Points Based on Tangent Plane Projection[J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2011, 36(7): 757-762(张剑清, 李彩林, 郭宝云. 基于切平面投影的散乱数据点快速曲面重建算法[J]. 武汉大学学报·信息科学版, 2011, 36(7): 757-762)
- [6] Yau H, Yang T, Jian H. A Region-Growing Algorithm Using Parallel Computing for Surface Reconstruction from Unorganized Points[J]. *Advances in Engineering Software*, 2013, 59: 29-37
- [7] Alexa M, Behr J, Cohen-Or D, et al. Point Set Surfaces[C]. The Conference on Visualization, San Diego, California, USA, 2001
- [8] Guennebaud G, Gross M. Algebraic Point Set Surfaces[C]. ACM Transactions on Graphics, San Diego, 2007
- [9] Campos R, Garcia R, Alliez P, et al. Splat-Based Surface Reconstruction from Defect-Laden Point Sets[J]. *Graphical Models*, 2013, 75(6): 346-361
- [10] Kazhdan M, Bolitho M, Hoppe H. Poisson Surface Reconstruction[C]. The Fourth Eurographics Symposium on Geometry Processing, Cagliari, 2006
- [11] Alliez P, Cohen-Steiner D, Tong Y, et al. Voronoi-Based Variational Reconstruction of Unoriented Point Sets[C]. Symposium on Geometry Processing, Barcelona, Spain, 2007
- [12] Mullen P, de Goes F, Desbrun M, et al. Signing the Unsigned: Robust Surface Reconstruction from Raw Pointsets[C]. Computer Graphics Forum, Lyon, France, 2010
- [13] Giraudot S, Cohen-Steiner D, Alliez P. Noise-Adaptive Shape Reconstruction from Raw Point Sets [C]. Computer Graphics Forum, Genova, Italy, 2013
- [14] Gander W, Golub G H, Strelbel R. Least-Squares Fitting of Circles and Ellipses[J]. *BIT Numerical Mathematics*, 1994, 34(4): 558-578
- [15] Pratt V. Direct Least-Squares Fitting of Algebraic Surfaces[J]. *ACM SIGGRAPH Computer Graphics*, 1987, 21(4): 145-152
- [16] Yuanxi Y. Robust Estimation for Dependent Observations[J]. *Manuscripta Geodaetica*, 1994, 19(1): 10-17
- [17] Adamson A, Alexa M. Approximating and Intersecting Surfaces from Points[C]. The 2003 Eurographics/ACM SIGGRAPH Symposium on Geometry Processing, Aachen, 2003
- [18] Boissonnat J, Oudot S. Provably Good Sampling And Meshing of Surfaces [J]. *Graphical Models*, 2005, 67(5): 405-451
- [19] Lorensen W E, Cline H E. Marching Cubes: A High Resolution 3D Surface Construction Algorithm [C]. The 14th Annual Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques, Anaheim, 1987
- [20] CGAL. Computational Geometry Algorithm Library [EB/OL]. <http://www.cgal.org>, 2015
- [21] Béchet E, Cuilliere J, Trochu F. Generation of a Finite Element MESH from Stereolithography (STL) Files [J]. *Computer-Aided Design*, 2002, 34(1): 1-17

## Using Delaunay Refinement to Reconstruct Surface from Noisy Point Clouds

LI Guojun<sup>1,2</sup> LI Zongchun<sup>1</sup> SUN Yuanchao<sup>1</sup> LI Wei<sup>1</sup> HUANG Zhiyong<sup>3</sup>

1 School of Mapping and Surveying, Information Engineering University, Zhengzhou 450052, China

2 Beijing Satellite Navigation Center, Beijing 100094, China

3 China Aerospace Surveying & Mapping Center, Beijing 102102, China

**Abstract:** To reconstruct surfaces from noisy point clouds, a surface reconstruction algorithm based on Delaunay refinement is proposed. First, a local surface is approximated by algebraic sphere, fitted through neighboring point coordinates and normals by the robust least square algorithm. Compared to traditional sphere fitting methods, the new method is more robust to noise and outliers. Secondly, to find any segment intersecting a surface in the Delaunay refinement procedure, surface bounding

spheres intersecting segments were efficiently located using the AABB-tree algorithm. Then, initialized by the sphere center, initial segment-surface intersections approximated within bounding spheres were parallel-computed by iterative segment-sphere intersection. Finally, the surface was meshed by Delaunay refinement, unambiguously. This approach can reconstruct surfaces with a good aspect ratio in comparison with the matching-cube algorithm. Experiments show that the new algorithm can efficiently, robustly, and accurately reconstruct surfaces from point clouds with high noise, but the time cost and memory consumption rapidly increases when executing precise models.

**Key words:** Delaunay refinement; sphere fitting; noisy point clouds; surface reconstruction

**First author:** LI Guojun, master, specializes in surface reconstruction and time-frequency measurement. E-mail:1010551750@qq.com

.....  
(上接第 69 页)

vided an unprecedented tool for capturing individual travel activities in space and time. However, the temporal sparsity and spatial imprecision of this data imposes significant biases upon the derived mobility patterns. Two efficient techniques to cope with this issue are proposed. First, we implement an activity-location and travel-OD identification method to reconstruct reliable trajectories from call detailed records for mobile users. Second, we introduce the approximate entropy, which is superior to conditional entropy, for quantifying the regularity of individuals' consecutively visited locations. With a case study in Harbin, the proposed approaches enable us to uncover meaningful patterns of urban mobility in terms of frequently and consecutively visited locations.

**Key words:** call detailed records; digital traces; displacement identification; mobility patterns; trajectory entropy

**First author:** KANG Chaogui, PhD, assistant professor, specializes in the theories and methods of urban informatics and trajectory computing. E-mail: cgkang@whu.edu.cn

**Foundation support:** The National Natural Science Foundation of China, No. 41601484; the Open Research Fund Program of Key Laboratory of Information Engineering in Surveying, Mapping and Remote Sensing, No. 15S01.