

# 一种有效的 LLL 规约算法

卢立果<sup>1,2</sup> 刘万科<sup>1,2,3</sup> 李江卫<sup>4</sup>

1 武汉大学测绘学院,湖北 武汉,430079

2 地球空间信息技术协同创新中心,湖北 武汉,430079

3 武汉大学地球空间环境与大地测量教育部重点实验室,湖北 武汉,430079

4 武汉市测绘研究院,湖北 武汉,430022

**摘要:**针对 Lenstra-Lenstra-Lovász(LLL)规约算法在高维情况下规约耗时较大的特点,采用贪心算法和部列向量规约,减少 LLL 算法规约过程中的基向量交换和尺度规约次数,以降低 LLL 算法的计算复杂度。通过模拟和实测的数据验证,该改进方法可以降低 LLL 算法的规约耗时,因而对高维模糊度的快速解算具有一定的参考应用价值。

**关键词:**GNSS; 整数最小二乘; 格基规约; 整周模糊度; LLL 规约算法; 部分尺度规约; 贪心算法

**中图分类号:**P207

**文献标志码:**A

相位整周模糊度的快速准确确定是 GNSS 实时精密定位的关键。国内外学者已提出了多种解算整周模糊度的方法,其中以 LAMBDA(least-squares ambiguity decorrelation adjustment)方法最具代表性<sup>[1]</sup>。该方法首次提出降相关的概念,通过采用么模矩阵对模糊度的方差阵进行整数变换,提高模糊度的搜索效率,随后各种降相关方法被相继提出<sup>[2-6]</sup>。由于整数最小二乘模糊度解算等价于格上最近向量问题,因而可以采用格基规约的方法处理此类问题。文献[7]提出的 LLL 规约算法是目前最为流行的格基规约算法。文献[8]把 LLL 规约算法引入到 GNSS 领域,并指出 LAMBDA 来源于 LLL 算法。随后,文献[9-11]对其作了一些改进,但采用的 LLL 规约算法缺少基向量交换过程。近来,文献[12]从理论上证明了规约可以有效地减少搜索候选点数;文献[13]对格基规约和降相关之间的等价性也做了证明。

由于高维模糊度解算中规约耗时在模糊度整体解算时间中占据很大比例,因此,如何减少规约算法的复杂度是本文研究的重点。文献[5]针对 LAMBDA 算法采用贪心选择过程以减少相邻条件方差的交换次数;文献[14]指出 LLL 算法的核心是基向量交换部分,并在此基础上提出了部分

尺度规约的 ELLL(Effective LLL)算法;文献[15]针对 ELLL 的截断误差较大的特点,提出有选择性进行列向量尺度规约的 PLLL(Partial LLL)算法。本文在此基础上进行改进。

## 1 数学模型

假定  $\mathbf{a}$ 、 $\mathbf{Q}_{aa}$  分别为最小二乘解算模糊度的实数解和方差-协方差阵,对其进行最小二乘模糊度整数估计,估计准则为<sup>[1]</sup>:

$$\min (\mathbf{a} - \mathbf{a})^T \mathbf{Q}_{aa}^{-1} (\mathbf{a} - \mathbf{a}), \mathbf{a} \in \mathbf{Z}^n \quad (1)$$

对  $\mathbf{Q}_{aa}$  进行 Cholesky 分解:

$$\mathbf{Q}_{aa} = \mathbf{B}^T \mathbf{B} \quad (2)$$

式中,  $\mathbf{B}$  为上三角矩阵。

把式(2)代入式(1)得:

$$\min \|\mathbf{B}^{-T}(\mathbf{a} - \mathbf{a})\|^2 = \min \|\mathbf{y} - \mathbf{B}^{-T}\mathbf{a}\|^2 \quad (3)$$

式中,  $\mathbf{y} = \mathbf{B}^{-T}\mathbf{a}$  是一个常数向量。

式(3)在格上被称为最近向量问题,常采用 LLL 规约算法进行解算。

对  $\mathbf{B}$  进行分解:

$$\mathbf{B} = \mathbf{D}\mathbf{U} \quad (4)$$

式中,  $\mathbf{D}$  为对角矩阵且主对角线元素为  $d_1, d_2, \dots, d_n$ ,  $\mathbf{U}$  为单位上三角矩阵。

规约后  $D, U$  中的元素满足如下条件<sup>[7]</sup>:

$$\begin{cases} |u_{i,j}| \leq 0.5, 1 \leq i < j \leq n \\ d_i^2 + u_{i-1,i}^2 \times d_{i-1}^2 \geq \omega \times d_{i-1}^2, 0.25 < \omega \leq 1 \end{cases} \quad (5)$$

其中,式(5)中第一行称为尺度规约;第二行称为基向量交换。

## 2 改进的 LLL 算法

由式(5)可以直观看出,LLL 算法规约的主要过程是尺度规约和基向量交换。要求  $|u_{i,j}| \leq 0.5$  的主要目的是尽可能地提高基向量交换的能力,以减少搜索过程中每一层的节点数。在进行 LLL 算法规约时,影响算法复杂度的主要因素是基向量的交换次数以及矩阵  $U$  中元素尺度规约个数。针对此,笔者从减少尺度规约个数和基向量交换次数的角度进行了算法改进。

### 2.1 部分尺度规约

在进行部分尺度规约之前,需要从理论上说明单纯的尺度规约对模糊度搜索候选点数没有影响,证明过程如下。

假设式(1)的目标函数满足:

$$(a - a)^T Q_{aa}^{-1} (a - a) \leq \chi^2 \quad (6)$$

对方差阵  $Q_{aa}$  进行上三角 Cholesky 分解:

$$Q_{aa} = L^T D L \quad (7)$$

当仅对  $Q_{aa}$  进行尺度规约不涉及排序过程时,有:

$$Q_{zz} = Z^T Q_{aa} Z = \bar{L}^T \bar{D} \bar{L} = \bar{L}^T D \bar{L} \quad (8)$$

式中,  $\bar{D} = D; \bar{L} = LZ$ 。

式(6)等价于下面形式的变换过程:

$$\begin{aligned} (a - a)^T Q_{aa}^{-1} (a - a) &= \\ (a - a)^T L^{-1} D^{-1} L^{-T} (a - a) &= \\ (a - a)^T Z Q_{zz}^{-1} Z^T (a - a) &= \\ (a - a)^T \bar{Z} \bar{L}^{-1} \bar{D}^{-1} \bar{L}^{-T} Z^T (a - a) &= \\ (\bar{z} - \bar{z})^T \bar{L}^{-1} \bar{D}^{-1} \bar{L}^{-T} (\bar{z} - \bar{z}) &\leq \chi^2 \end{aligned} \quad (9)$$

式中,  $Z^T (a - a) = (\bar{z} - \bar{z})$ 。

假若令:

$$\begin{cases} a - a = L^{-T} (\bar{a} - \bar{a}) \\ \bar{z} - \bar{z} = \bar{L}^{-T} (\bar{z} - \bar{z}) \end{cases} \quad (10)$$

将式(10)代入式(9),可以得到:

$$\begin{aligned} (a - a)^T D^{-1} (a - a) &= (\bar{z} - \bar{z})^T \bar{D}^{-1} (\bar{z} - \bar{z}) \\ \Rightarrow (\bar{a} - \bar{a}) &= (\bar{z} - \bar{z}) \end{aligned} \quad (11)$$

可以看出,单纯尺度规约和未进行尺度规约所获得的模糊度候选向量是一致的。当规约时进行基向量排序,则式(8)中  $\bar{L} \neq LZ; \bar{D} \neq D$ ,式(11)

结论不再成立。

上述证明表明,在进行 LLL 算法时,一般仅需考虑次对角线元素的规约。但是为了规约算法的有效性和数值的稳定性,需要对部分非对角线元素在满足一定条件下的情况进行尺度规约。

当基向量不满足交换条件时,有:

$$\begin{cases} u_{i-1,i} = u_{i-1,i} - [u_{i-1,i}]_{\text{round}} \\ d_i^2 + u_{i-1,i}^2 \times d_{i-1}^2 \geq \omega \times d_{i-1}^2 \end{cases} \quad (12)$$

式中,  $[ ]_{\text{round}}$  代表取整操作。

当  $|[u_{i-1,i}]_{\text{round}}| > 2$  时,需对列向量中其余元素进行规约<sup>[15]</sup>,即

$$u_{k,i} = u_{k,i} - [u_{k,i}]_{\text{round}}, k = i - 2, i - 3, \dots, 1 \quad (13)$$

称式(13)为列向量规约过程。

需要注意的是,每次对矩阵元素进行规约时,需要更新相应的列向量元素,即当对  $u_{i-1,i}$  规约时,列向量元素进行如下更新:

$$\begin{cases} z_{i-1,i} = [u_{i-1,i}]_{\text{round}} \\ u_{k,i} = u_{k,i} - u_{k,i-1} \times z_{i-1,i}, k = 1, 2, \dots, i - 1 \end{cases} \quad (14)$$

### 2.2 贪心算法

贪心算法(又称贪婪算法)是指在对问题求解时,总是做出当前看来是最好的选择。即它不从总体最优上加以考虑,所做出的只是某种意义上的局部最优解。贪心算法不是对所有问题都能得到整体最优解,但在相当广泛的范围内,它能得到许多问题的整体最优解或者是整体最优解的近似解<sup>[16]</sup>。

由于 LLL 算法需要进行基向量的迭代交换,因此可以采用贪心算法交换相邻基向量。下面是贪心算法的具体实现。

令

$$\hat{d}_{i-1}^2 = d_i^2 + u_{i-1,i}^2 \times d_{i-1}^2 \quad (15)$$

当选择一对基向量  $(i - 1, i)$  进行交换时,参数  $i$  定义为:

$$i = \underset{2 \leq i \leq n}{\operatorname{argmin}} \{ \hat{d}_{i-1}^2 / \omega \times d_{i-1}^2 : \hat{d}_{i-1}^2 < \omega \times d_{i-1}^2 \} \quad (16)$$

当参数  $i$  不存在时,则结束基向量交换。当一对基向量  $(i - 1, i)$  进行交换后,相邻对角线元素  $d_i, d_{i-1}$  的值发生了变化,单位上三角阵  $U$  中的元素  $u_{i-1,i}, u_{i,i+1}$  的大小也相应发生了变化,因此当下一次基向量交换过程时,仅需更新  $(d_{i-2}, d_{i-1}), (d_{i-1}, d_i)$  和  $(d_i, d_{i+1})$  三个基向量对所对应的式(16)中的比值。

### 2.3 处理流程

结合流程图 1,改进的 LLL 算法的解算步骤

如下。

(1) 首先对原始的方差阵  $Q_{aa}$  按照式(2)进行 Cholesky 分解, 获得上三角阵  $B$ 。

(2) 在第一次基向量交换前, 对  $B$  中所有的次对角线元素都进行尺度规约, 并根据式(15) 求出对应的  $\hat{d}_{i-1}^2 (i=2, 3, \dots, n)$ 。

(3) 根据式(5)的基向量交换条件判断是否存在需要交换的基向量。如果没有则退出整个规约过程; 如果存在交换的基向量则按照式(16) 选择当前局部最优的一组交换基  $(k-1, k)$ , 并判断这对基向量对应的次对角线元素  $u_{k-1, k}$  的绝对值在未进行尺度规约时是否大于 2, 如果大于则对  $k-1$  列的其他元素进行尺度规约, 否则不进行列向量规约。

(4) 当上一次基向量交换后, 则重新进行步骤(2)、步骤(3)过程。其中步骤(2)过程不再需要计算所有的  $\hat{d}^2$  值, 仅需更新  $(d_{k-2}, d_{k-1})$ 、 $(d_{k-1}, d_k)$  和  $(d_k, d_{k+1})$  三个基向量对对应的  $\hat{d}_{k-2}^2$ 、 $\hat{d}_{k-1}^2$  和  $\hat{d}_{k, k}^2$  值。

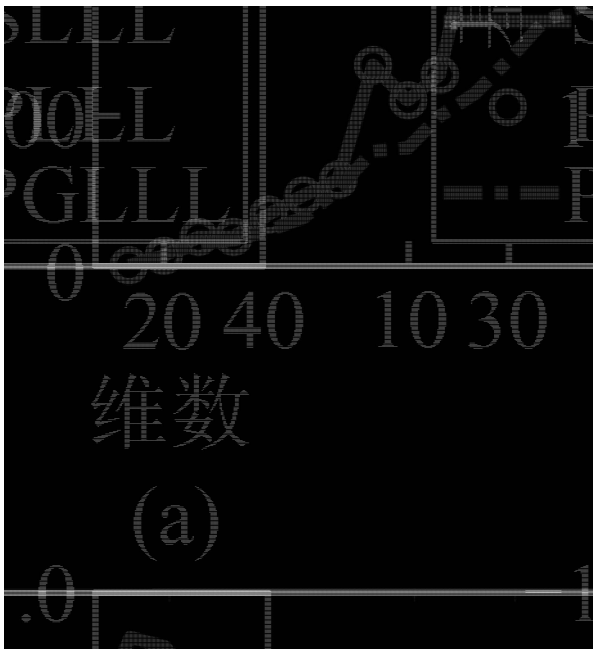


图1 改进的 LLL 规约算法的处理流程

Fig. 1 Flowchart of Improved LLL Algorithm

### 3 实验结果与分析

笔者采用 LLL 算法、PLLL 算法<sup>[15]</sup>以及本文改进的 LLL 规约算法进行对比。考虑到 PLLL 在进行规约之前采用 SortedQR<sup>[2, 17]</sup> 对其进行预排序以降低基向量迭代次数, 为便于验证算法的合理性, 本文对 LLL 算法和本文算法也进行了预

排序处理。下文分别把采用预排序的 LLL 算法和改进的 LLL 算法简称作 SLLL 和 PGLLL 算法。

本文分别基于模拟和实测数据进行统计分析三种算法的规约耗时、基向量交换次数、搜索候选点数以及整体解算耗时, 验证 PGLLL 算法的规约性能。其中, 模糊度整数向量的搜索均采用 SE-VB 算法<sup>[5]</sup> 完成。本文所有的计算均基于 MATLAB 2012b 软件完成, PC 机硬件配置为: Intel Core i7-3520 CPU, 2.90 GHz, 4 GB 内存, Win7 系统。

#### 3.1 实验 1

借鉴文献[5]的模拟方法进行实验数据模拟。模糊度浮点解构造为:

$$a = 100 \times \text{randn}(n, 1) \quad (17)$$

式中,  $\text{randn}(n, 1)$  表示随机生成的  $n$  个服从标准正态分布的元素。

模糊度的方差阵按照式(18)进行生成:

$$Q_{aa} = LDL^T \quad (18)$$

式中,  $L$  是单位下三角矩阵, 且下三角元素  $l_{ij} (i > j)$  服从标准正态分布;  $D$  是主对角线为  $(10, 10, 10, 0.01, \dots, 0.01)$  的对角阵。

上述模拟过程中, 已知三个模糊度就可以唯一确定基线分量, 其余模糊度也可相应得出, 因此在设计时应遵循前三个条件方差相对较大的原则。考虑到高维模糊度解算的需求, 笔者随机生成一个维数为 40 的模糊度方差阵  $Q_{aa}$  和浮点解  $a$ 。

图 2(a) 为三种算法在不同维数下基向量交换个数的变化趋势。从图 2(a) 中看到, 三种算法的基向量交换次数与维数呈正相关关系; PGLLL 具有最少的交换个数, PLLL 和 SLLL 的交换个数一致。图 2(b) 是不同维数下三种算法的规约耗时。从图 2(b) 中可以直观看到, 随着维数的增大, 模糊度的规约耗时总体呈上升趋势; PGLLL 具有最小的规约时间, PLLL 规约时间在前 10 维可能存在大于 SLLL 的情形, 在维数增大时 PLLL 的规约时间低于 SLLL。

对图 2 中的结果进行分析, 由于 PLLL 仅减少一些非对角线元素的尺度规约过程, 不影响基向量的排序, 因而 PLLL 在基向量交换次数上等同于 SLLL 这一现象同理论相符合; PGLLL 采用的贪心算法通过寻找局部最优解降低了基向量交换个数, 因此 PGLLL 相对于其他两种算法降低了规约耗时; 在低维条件下, 三种方法的规约时间均较少, 在高维情形下, 由于减少了部分列向量规约过程, 因而 PLLL 规约效率优于 SLLL。

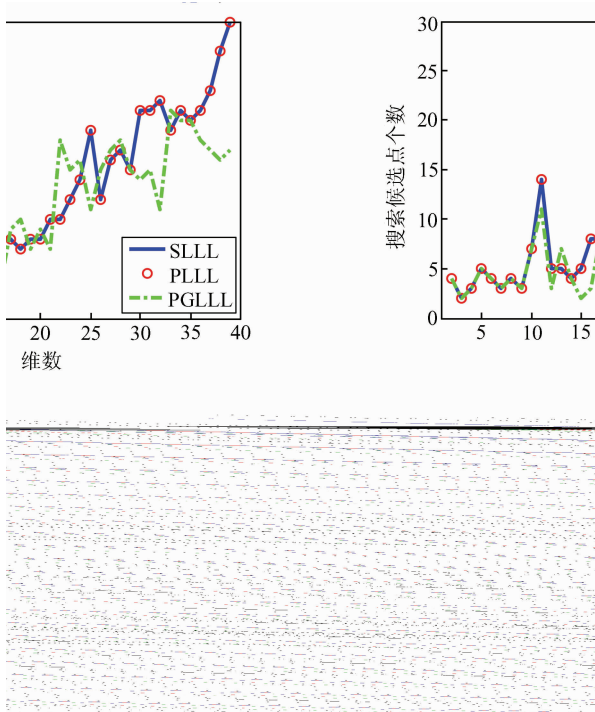


图 2 不同维数下的规约时间和基向量交换次数  
Fig. 2 Reduction Time and Basis Swap Numbers in Different Dimensions

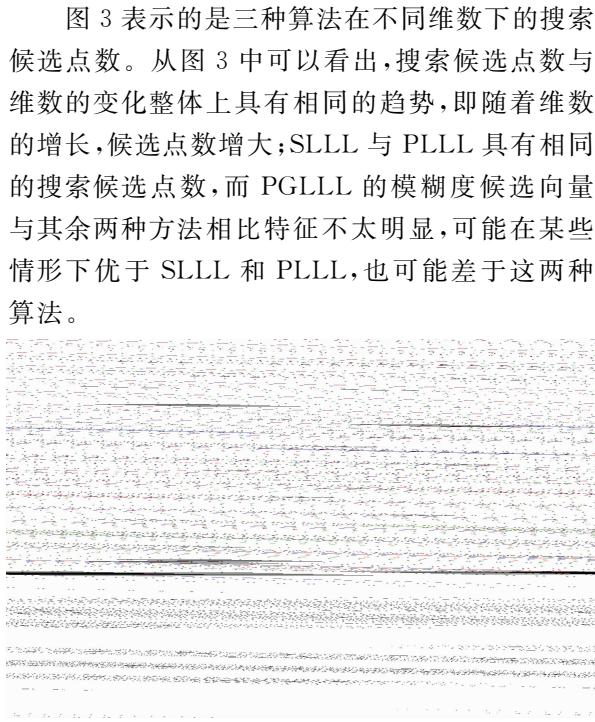


图 3 不同维数下的模糊度搜索候选点数  
Fig. 3 Ambiguity Searching Candidate Numbers in Different Dimensions

图 3 表示的是三种算法在不同维数下的搜索候选点数。从图 3 中可以看出,搜索候选点数与维数的变化整体上具有相同的趋势,即随着维数的增长,候选点数增大;SLLL 与 PLLL 具有相同的搜索候选点数,而 PGLLL 的模糊度候选向量与其余两种方法相比特征不太明显,可能在某些情形下优于 SLLL 和 PLLL,也可能差于这两种算法。

的贪心算法在规约时选择的基向量每次都是局部最优解,考虑到基向量交换后需要对次对角线元素进行规约,因此获得的最终基向量长度不同于 SLLL 和 PLLL(基向量是按照一定的顺序交换获得的),从而造成不同维数下 PGLLL 的搜索候选向量个数与 SLLL 和 PLLL 相比出现不同的结果。

### 3.2 实验 2

图 4 是基线长约为 12.6 km,接收机型号为南方 S82-C,采样间隔为 1 s,500 个历元的 GPS+BeiDou 单历元处理结果。图 4(a)是三种规约方法解算的 500 个历元的基向量交换次数的累积分布函数图,从图 4(a)中可以看出,PGLLL 的基向量交换个数小于 SLLL 和 PLLL,且 SLLL 和 PLLL 具有相同的交换个数。图 4(b)是三种规约方法的规约时间的累积分布函数图,从图 4(b)中可以得到三种算法的规约效率的高低依次为 PGLLL、PLLL 和 SLLL。图 4(c)统计的是所有历元解算后的模糊度候选向量的累积分布函数,可以看出,SLLL 和 PLLL 具有相同的搜索候选点数,而 PGLLL 的搜索候选点个数与其余两种算法的关系呈现不规则性。图 4(d)为三种规约算法最终解算出模糊度向量所需时间的累积分布函数图,从中可以得到三种算法的优劣顺序为 PGLLL、PLLL 和 SLLL,但三种算法的效率优劣主要取决于累积概率在 0.6 以下时三者的差异。

综合图 4 的结果,在静态单历元情况下三种算法的解算结果基本与模拟结果一致,因而此处不再对上述结果进行解释。

### 3.3 实验 3

图 5 是采用的车载实验解算的结果。基线长变化范围为 0~6 km,接收机型号为南方 S82-C,采样间隔为 5 s,单历元模糊度解算。图 5 与图 4 中各图对应的顺序一致,从结果可以直观看到,图 5(a)和图 5(b)与实验 2 中现象是一致的,因此此处笔者略去其描述,具体可以参照实验 2。从图 5(c)可以看出,PGLLL 的搜索候选点个数整体上少于其余两种方法,具有明显的差异性。图 5(d)则说明了 PGLLL 的最终模糊度解算效率明显优于 PLLL 算法,同时 PLLL 的解算结果要优于 SLLL。

对图 5 中三种算法解算效率的差异进行分析,由于此时 PGLLL 在规约效率和减少搜索候选点数上都具有明显的优势,因而具有较优的解算效果。

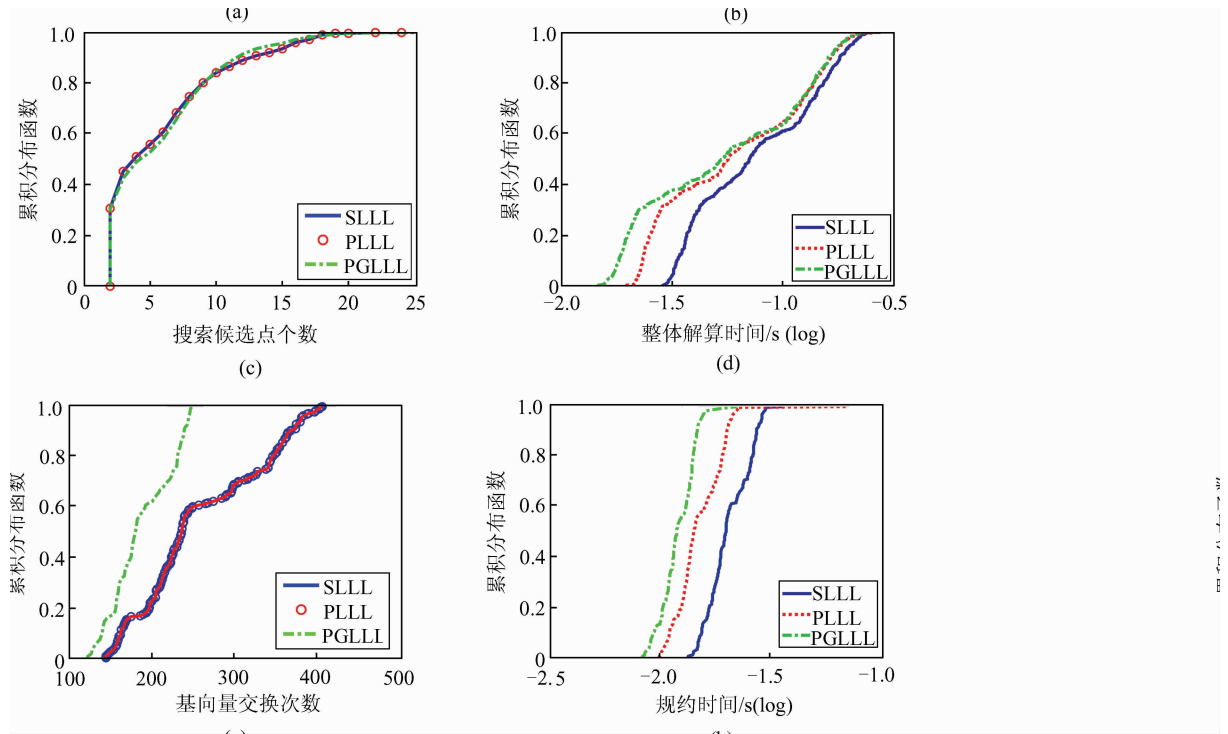


图4 静态模式下不同历元的模糊度解算结果

Fig. 4 Ambiguity Resolution in Different Epochs

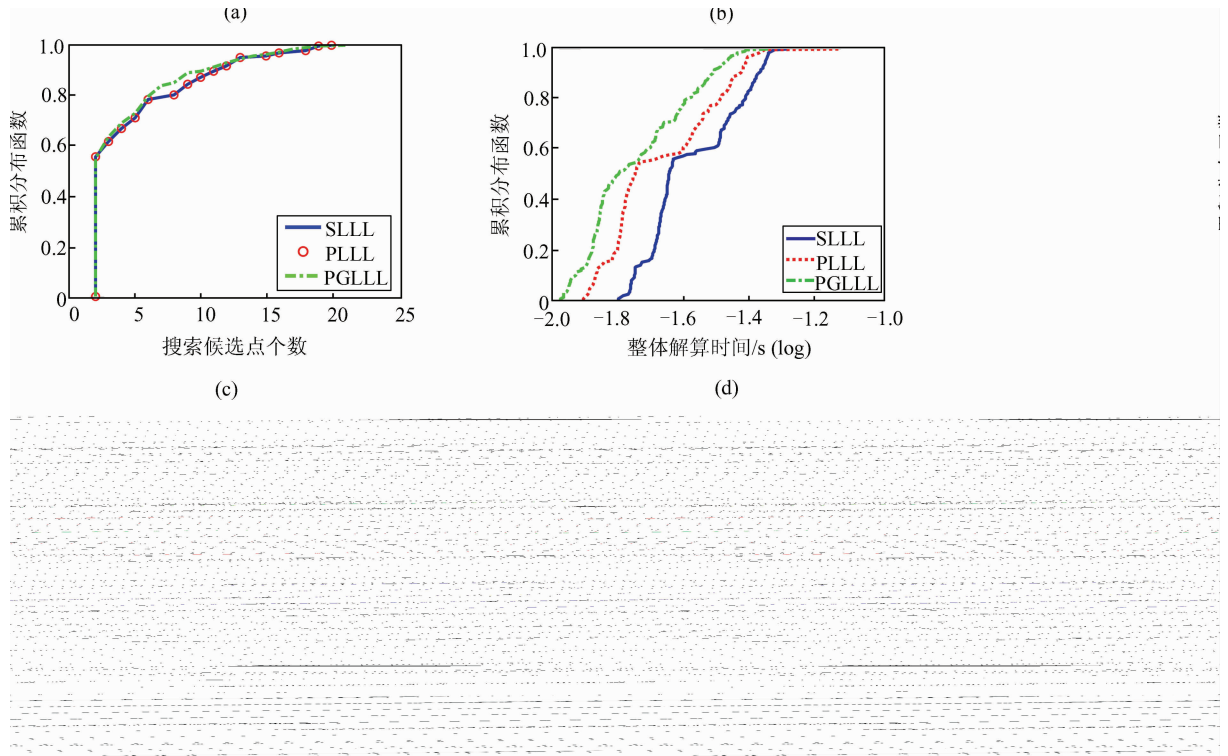


图5 动态模式下不同历元的模糊度解算结果

Fig. 5 Ambiguity Resolution in Different Epochs

### 4 结 语

本文通过采用基向量的贪心选择和部分列向

量元素的规约实现对 LLL 规约算法的改进。理论和实测数据的验证表明,改进后的方法可以减少基向量的交换次数和尺度规约个数,降低了 LLL 规约算法的计算复杂度,进而提高了规约效

率。采用贪心算法可能使获得的规约基存在一定差异,但该算法对搜索候选点数影响较小,因此改进的算法在整体解算耗时上相较于 LLL 算法具有一定的优势。此改进算法对模糊度的快速解算具有较好的应用价值。

### 参 考 文 献

- [1] Teunissen P J G, Jonge P J, Tiberius C C J M. The Least-squares Ambiguity Decorrelation Adjustment: A Method for Fast GPS Integer Ambiguity Estimation[J]. *Journal of Geodesy*, 1995, 70(1): 65-82
- [2] Xu P L. Random Simulation and GPS Decorrelation [J]. *Journal of Geodesy*, 2001, 75: 408-423
- [3] Xu P L. Parallel Cholesky-based Reduction for the Weighted Integer Least Squares Problem[J]. *Journal of Geodesy*, 2012, 86: 35-52
- [4] Liu L T, Hsu H T, Zhu Y Z, et al. A New Approach to GPS Ambiguity Decorrelation[J]. *Journal of Geodesy*, 1999, 73: 478-490
- [5] Chang X, Yang X, Zhou T. MLAMBDA: A Modified LAMBDA Method for Integer Least-squares Estimation[J]. *Journal of Geodesy*, 2005, 79(9): 552-565
- [6] Zhou Y M. A New Practical Approach to GNSS High-dimensional Ambiguity Decorrelation [J]. *GPS Solutions*, 2011, 15: 325-331
- [7] Lenstra A K, Lenstra H W, Lovasz L. Factoring Polynomials with Rational Coefficients [J]. *Mathematische Annalen*, 1982, 261(4): 515-534
- [8] Hassibi A, Boyd S. Integer Parameter Estimation in Linear Models with Applications to GPS [J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 1998, 46(11): 2 938-2 952
- [9] Lou Lizhi. One Modified LLL Algorithm in GPS Decorrelation[J]. *Journal of Tongji University*, 2004, 32(2): 237-242 (楼立志. 对 GPS 模糊度解相关方法的一种改进[J]. 同济大学学报, 2004, 32(2): 237-242)
- [10] Liu Zhiping, He Xiufeng. An Improved LLL Algorithm for GPS Ambiguity Solution [J]. *Acta Geodaetica et Cartographica Sinica*, 2007, 36(3): 286-289 (刘志平, 何秀凤. 改进的 GPS 模糊度降相关 LLL 算法[J]. 测绘学报, 2007, 36(3): 286-289)
- [11] Yang Ronghua, Hua Xianghong, Li Zhao, et al. An Improved LLL Algorithm for GPS Ambiguity Solution [J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2010, 35(1): 21-24 (杨荣华, 花向红, 李昭, 等. GPS 模糊度降相关 LLL 算法的一种改进[J]. 武汉大学学报·信息科学版, 2010, 35(1): 21-24)
- [12] Jazaer I S, Amiri-simkooei A R, Sharifi M A. Fast Integer Least-squares Estimation for GNSS High-dimensional Ambiguity Resolution Using the Lattice Theory [J]. *Journal of Geodesy*, 2012, 86: 123-136
- [13] Liu Jingnan, Yu Xingwang, Zhang Xiaohong. GNSS Ambiguity Resolution Using Lattice Theory [J]. *Acta Geodaetica et Cartographica Sinica*, 2012, 41(5): 636-645 (刘经南, 于兴旺, 张小红. 基于格论的 GNSS 模糊度解算[J]. 测绘学报, 2012, 41(5): 636-645)
- [14] Cong L, Howgrave-graham N. Effective LLL Reduction for Lattice Decoding [C]. *IEEE International Symposium on Information Theory, Nice, France*, 2007
- [15] Xie X, Chang X W, Borno M A. Partial LLL reduction [C]. *Proceeding of IEEE GLOBECOM 2011, Houston, USA*, 2011
- [16] Chen Zhiping, Xu Zongben. *Computer Math Computer Complexity Theory and NPC, NP Hard Problem [M]*. 1st Edition. Beijing: Science Press, 2001 (陈志平, 徐宗本. 计算机数学: 计算复杂性理论与 NPC、NP 难问题的求解 [M]. 1 版. 北京: 科学出版社, 2001)
- [17] Wubben D, Bohnke R, Rinas J, et al. Efficient Algorithm for Decoding Layered Spacetime Codes [J]. *Electronics Letters*, 2001, 37(22): 1 348-1 350

## An Efficient LLL Reduction Algorithm

LU Ligu<sup>1,2</sup> LIU Wanke<sup>1,2,3</sup> LI Jiangwei<sup>4</sup>

1 School of Geodesy and Geomatics, Wuhan University, Wuhan 430079, China

2 Collaborative Innovation Center for Geospatial Technology, Wuhan 430079, China

3 Key Laboratory of Geospace Environment and Geodesy, Ministry of Education, Wuhan University, Wuhan 430079, China

4 Wuhan Institute of Surveying and Mapping, Wuhan 430022, China

**Abstract:** The ambiguity resolution is one of the primary problems in GNSS carrier phase measurement. To acquire carrier phase integer ambiguity rapidly and accurately, we often take advantage of

integer least-squares (ILS) estimation criterion to resolve ambiguity. Due to ILS problem can be regarded as closest vector problem (CLP) in lattice theory, therefore, lattice reduction could help to accelerate ambiguity enumeration process, shorten the search time, and further to improve the computation efficiency of ambiguity resolution. Among many of lattice reduction algorithms, Lenstra-Lenstra-Lovász (LLL) is a most popular and widely used reduction algorithm in many fields. It includes two reduction conditions, size reduction and basis vector swapping. However, size reduction is aimed at all matrix elements and basis vector swapping is only limited to two adjacent vectors, that will result in the unnecessary elements size reduction and excessive basis vector swapping times. Hence, both of them are not conducive to improving the ambiguity reduction efficiency, especially for high-dimensional ambiguity resolution. To overcome this problem, we adopt the greedy algorithm and partial column vector reduction to reduce the number of basis swapping and size reduction, in this contribution the computing complexity of LLL reduction algorithm is reduced, where LLL reduction algorithm has a long time-consuming under high-dimensional conditions. Simulations and real data validations have clearly shown that the modified LLL reduction algorithm can significantly improve the computational efficiency. Therefore our modified LLL algorithm has a certain useful value for fast resolution under high-dimensional case.

**Key words:** GNSS; integer least-squares; integer ambiguity; lattice reduction; LLL reduction algorithm; partial size reduction; greedy algorithm

**First author:** LU Ligu, PhD candidate, specializes in GNSS high-dimension ambiguity resolution. E-mail: lglu66@163.com

**Corresponding author:** LIU Wanke, PhD, associate professor. E-mail: wkliu@sgg.whu.edu.cn

**Foundation support:** The National Natural Science Foundation of China, No. 41204030

.....  
(上接第 1117 页)

stability when calculating inversion with the algebraic reconstruction technique, The Algebraic Reconstruction Technique is used to construct the distribution of water vapor; experimental results indicate that the solution of the traditional ART shows large reconstruction error due to the distribution property of the water vapor in the troposphere, while the IART method which adapts a relaxation parameter vector gets a favorable solution. The MART method also shows the similar results. Compared inversion with constraints, the algebraic reconstruction technique method is more susceptible to the observation error. The solution generated by the MART method is better than that of the IART method.

**Key words:** Global Navigation Satellite System; algebraic reconstruction technique; water vapor; tomography

**First author:** YU Shengjie, PhD, specializes in GPS data processing and ground-based GPS meteorology. E-mail: yusj\_who@163.com

**Foundation support:** The National Natural Science Foundation of China, No. 41375041; the Open Research Fund Program of State Key Laboratory of Geodesy and Earth's Dynamics, No. SKLGED2013-4-3-E; the Open Research Fund Program of Hubei Key Laboratory for Heavy Rain Monitoring and Warning Research, No. IHR201302.