

# GPS 高程转换的总体最小二乘拟合推估模型

王乐洋<sup>1,2</sup> 吴 飞<sup>1,3</sup> 吴良才<sup>1</sup>

1 东华理工大学测绘工程学院,江西 南昌,330013

2 流域生态与地理环境监测国家测绘地理信息局重点实验室,江西 南昌,330013

3 中国矿业大学环境与测绘学院,江苏 徐州,221116

**摘 要:**在现有的关于 GPS 高程转换的总体最小二乘方法研究中,通常是将高程异常转换参数的计算与待求点高程异常的计算分两步进行处理,并且只考虑由已知高程异常点的平面坐标组成的系数矩阵的误差,忽略了高程异常待求点的坐标误差。针对以上问题,本文提出了 GPS 高程转换的总体最小二乘拟合推估模型,将计算高程异常转换参数和待求点高程异常联合处理,且考虑到所有点的点位误差,最后采用拟合推估法进行求解。实验结果表明,本文方法能够有效地提高高程转换的精度。

**关键词:**总体最小二乘;拟合推估法;GPS 高程;高程转换;多项式拟合

**中图法分类号:**P228.41

**文献标志码:**A

由于 GPS 可以在同一时间获得点位的三维坐标,测量工作的效率得到了很大的提高,但是 GPS 获得的是基于 WGS84 参考椭球的大地高,在实际工程应用中,我国高程系统普遍采用正常高,如果大地高能够准确地转换为正常高,现在的测量工作所需要的平面控制测量和高程控制测量就能够同时进行。

对于大多数工程应用,由于测区范围不大,高程异常变化平缓,多项式拟合便可满足精度要求<sup>[1]</sup>,可通过建立 GPS 高程异常值与平面坐标之间的多项式关系求解转换参数。在实际参数估计问题中,对于大部分线性模型来说,一般由于数据采样大小、模型化及测量等原因引起了系数矩阵的误差,故其系数阵并非常数阵而是由其他方法计算得到的具有一定误差的变量矩阵<sup>[2]</sup>,通常可以采用总体最小二乘来进行解算。目前已有相关学者采用总体最小二乘方法进行 GPS 高程转换参数的估计:文献[3]考虑不同曲面拟合模型中的水平和竖直坐标中含有误差的情形,分别基于二次多项式曲面、三次多项式曲面、移动二次多项式曲面,利用最小二乘估计、总体最小二乘和加权总体最小二乘算法进行高程转换;文献[4]引入基于

加权总体最小二乘的二次多项式 GPS 高程转换,并采用了一种简化的定权方法;文献[5]考虑到二次多项式 GPS 高程转换模型系数矩阵的特点,采用混合总体最小二乘的方法进行 GPS 高程转换,在合理考虑系数矩阵和观测向量误差的情况下,利用其提出的基于总体最小二乘平差的粗差探测方法进行粗差剔除后,对 GPS 高程转换参数进行求解;文献[6]考虑系数矩阵和观测数据的随机误差,讨论基于总体最小二乘法建立的高斯-马尔科夫模型,同时考虑由于粗差的存在,观测数据精度不相等的情况,提出稳健总体最小二乘的算法来计算转换参数。

但是,在现有的关于总体最小二乘方法在 GPS 高程转换中应用的研究中,通常都是将转换参数的计算与待求点高程异常计算独立进行,并且在对待求点高程异常进行高程转换时忽略了待求点本身的坐标误差。因此,本文在文献[7]的基础上提出 GPS 高程转换的总体最小二乘拟合推估模型,该模型考虑到所有点的点位误差,且将计算转换参数和计算待求点高程异常联合处理,最后采用拟合推估法进行求解,并通过模拟算例对该方法的可行性进行了验证。

**收稿日期:**2014-09-09

**项目资助:**国家自然科学基金(41204003);江西省教育厅科技项目(GJJ150595,KJLD12077,KJLD14049);流域生态与地理环境监测国家测绘地理信息局重点实验室项目(WE2015005);对地观测技术国家测绘地理信息局重点实验室项目(K201502);测绘地理信息公益性行业科研专项(201512026);东华理工大学博士科研启动基金(DHBK201113);江西省杰出青年人才资助计划;国家重点研发计划(2016YFB0501405)。

**第一作者:**王乐洋,博士,副教授,主要研究方向为大地测量反演及大地测量数据处理。wleyang@163.com

# 1 GPS 高程转换联合模型与拟合推估法

## 1.1 GPS 高程转换联合模型

基于二次多项式曲面的 GPS 高程转换模型为:

$$\xi_i = a_0 + a_1 x_i + a_2 y_i + a_3 x_i^2 + a_4 x_i y_i + a_5 y_i^2 \quad (1)$$

式中,  $\xi_i$  为坐标  $(x_i, y_i)$  的高程异常;  $\lambda = [a_0 \ a_1 \ a_2 \ a_3 \ a_4 \ a_5]^T$  为待估参数。式(1)的矩阵形式可写为:

$$\xi_i = \mathbf{A}_i \lambda \quad (2)$$

其中,  $\mathbf{A}_i = [1 \ x_i \ y_i \ x_i^2 \ x_i y_i \ y_i^2]$ 。

由于控制点的坐标值及高程异常不可避免地受观测误差的影响,对观测向量及系数矩阵引入误差向量可得:

$$\xi_i - e_{\xi_i} = (\mathbf{A}_i - \mathbf{E}_{A_i}) \lambda \quad (3)$$

其中,  $\mathbf{E}_{A_i} = [0 \ \mathbf{E}_{x_i} \ \mathbf{E}_{y_i} \ \mathbf{E}_{x_i^2} \ \mathbf{E}_{x_i y_i} \ \mathbf{E}_{y_i^2}]$ 。

联合  $n$  个高程异常已知点求解高程异常转换参数,则:

$$\xi - e_{\xi} = (\mathbf{A} - \mathbf{E}_A) \lambda \quad (4)$$

式中,

$$\xi = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix}; e_{\xi} = \begin{bmatrix} e_{\xi_1} \\ \vdots \\ e_{\xi_n} \end{bmatrix}; \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{A}_n \end{bmatrix}; \mathbf{E}_A = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_{A_1} \\ \vdots \\ \mathbf{E}_{A_n} \end{bmatrix}。$$

假设有  $m$  个高程异常待求点,计算它们的高程异常:

$$\mathbf{g} = (\mathbf{B} - \mathbf{e}_B) \lambda \quad (5)$$

式中,系数矩阵  $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{n+1} \\ \vdots \\ \mathbf{A}_{n+m} \end{bmatrix}$  由高程异常待求点的

坐标组成;  $\mathbf{E}_B = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_{A_{n+1}} \\ \vdots \\ \mathbf{E}_{A_{n+m}} \end{bmatrix}$  为对应的系数矩阵误差

阵;  $\mathbf{g}$  为高程异常待求点的转换值。从而建立 GPS 高程转换联合模型:

$$\begin{cases} \xi - e_{\xi} = (\mathbf{A} - \mathbf{E}_A) \lambda \\ \mathbf{g} = (\mathbf{B} - \mathbf{E}_B) \lambda \end{cases} \quad (6)$$

假设控制点的点位坐标误差相关,且服从零均值正态分布,则联合模型的各项误差的随机模型为:

$$\begin{bmatrix} e_{\xi} \\ e_A \\ e_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_{\xi} \\ \text{vec}(\mathbf{E}_A) \\ \text{vec}(\mathbf{E}_B) \end{bmatrix} \sim N \left( \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{\xi\xi} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_{AA} & \mathbf{Q}_{AB} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_{BA} & \mathbf{Q}_{BB} \end{bmatrix} \right) \quad (7)$$

式中,  $\text{vec}(\cdot)$  为矩阵向量化算子;  $\mathbf{Q}$  是协因数阵。

## 1.2 拟合推估法

拟合推估模型的标准形式为<sup>[7]</sup>:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{y}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C}_0 \end{bmatrix} \boldsymbol{\beta} + \begin{bmatrix} \mathbf{E}_y \\ \mathbf{E}_{y_0} \end{bmatrix} \quad (8)$$

式中,  $\mathbf{y}$  和  $\mathbf{e}_y$  分别为  $n \times 1$  观测向量和误差向量;  $\boldsymbol{\beta}$  是  $k \times 1$  的参数向量;  $\mathbf{C}$  是它的设计矩阵且列满秩;  $\mathbf{y}_0$  是  $n_0 \times 1$  未知随机信号向量;  $\mathbf{e}_{y_0}$  和  $\mathbf{C}_0$  分别为它的误差向量和设计矩阵。通常要求  $n > k$ , 但并不要求  $n_0 > k$ 。模型(8)的求解包含平差和预报两个部分,平差是指采用观测向量  $\mathbf{y}$  估计参数  $\boldsymbol{\beta}$ , 预报则是指根据信号  $\mathbf{y}_0$  与参数  $\boldsymbol{\beta}$  的函数关系及其与观测向量  $\mathbf{y}$  的随机关系对其做出合理的推估。若  $\mathbf{e}_y$  和  $\mathbf{e}_{y_0}$  服从正态分布:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{e}_y \\ \mathbf{e}_{y_0} \end{bmatrix} \sim N \left( \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{yy} & \mathbf{Q}_{yy_0} \\ \mathbf{Q}_{y_0 y} & \mathbf{Q}_{y_0 y_0} \end{bmatrix} \right) \quad (9)$$

根据最小二乘准则:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{e}_y \\ \mathbf{e}_{y_0} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{yy} & \mathbf{Q}_{yy_0} \\ \mathbf{Q}_{y_0 y} & \mathbf{Q}_{y_0 y_0} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_y \\ \mathbf{e}_{y_0} \end{bmatrix} = \min \quad (10)$$

求解的最优线性无偏参数估计值和预报值分别为:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{C}^T \mathbf{Q}_{yy}^{-1} \mathbf{C})^{-1} \mathbf{C}^T \mathbf{Q}_{yy}^{-1} \mathbf{y} \quad (11)$$

$$\hat{\mathbf{y}}_0 = \mathbf{C}_0 \hat{\boldsymbol{\beta}} + \mathbf{Q}_{y_0 y} \mathbf{Q}_{yy}^{-1} (\mathbf{y} - \mathbf{C} \hat{\boldsymbol{\beta}}) \quad (12)$$

## 2 GPS 高程转换联合模型的求解

GPS 高程转换联合模型是非线性模型, 本文将根据高斯-牛顿法<sup>[7]</sup>和转换参数的数值特点, 分别将式(6)转化为线性模型, 并采用拟合推估法进行求解。

### 2.1 基于高斯牛顿法的线性模型<sup>[7]</sup>

采用高斯-牛顿法将联合模型线性化后进行迭代计算, 设第  $j$  次迭代后的估值为  $\lambda_{(j)}$ , 则参数  $\lambda$  表示为:

$$\lambda = \lambda_{(j)} + \delta \lambda_{(j)} \quad (13)$$

式中,  $\delta \lambda_{(j)}$  为第  $j+1$  次迭代的参数改正数。再将式(13)代回式(6)可得:

$$\begin{cases} \xi - e_{\xi} = \mathbf{A} \lambda_{(j)} - \mathbf{E}_A \lambda_{(j)} + (\mathbf{A} - \mathbf{E}_A) \delta \lambda_{(j)} \\ \mathbf{g} = \mathbf{B} \lambda_{(j)} - \mathbf{E}_B \lambda_{(j)} + (\mathbf{B} - \mathbf{E}_B) \delta \lambda_{(j)} \end{cases} \quad (14)$$

尽管  $\mathbf{E}_A \delta \lambda_{(j)}$  和  $\mathbf{E}_B \delta \lambda_{(j)}$  是二阶的小量, 但是完全忽略二阶以上的小量, 可能导致迭代发散或收敛错误。采用  $\mathbf{E}_A$  和  $\mathbf{E}_B$  的第  $j$  次迭代估值  $\mathbf{E}_{A_{(j)}}$

和  $E_{B_{(j)}}$  代替  $E_A$  和  $E_B$  计算系数矩阵可避免该缺陷。记  $A_{(j)} = A - E_{A_{(j)}}$ ,  $B_{(j)} = B - E_{B_{(j)}}$ , 则(14)可变为:

$$\begin{cases} \xi - e_\xi = A\lambda_{(j)} - E_A\lambda_{(j)} + A_{(j)}\delta\lambda_{(j)} \\ g = B\lambda_{(j)} - E_B\lambda_{(j)} + B_{(j)}\delta\lambda_{(j)} \end{cases} \quad (15)$$

将上式改写成拟合推估模型的标准形式:

$$\begin{bmatrix} \xi - A\lambda_{(j)} \\ e_A \\ e_B \\ g - B\lambda_{(j)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{(j)} \\ 0 \\ 0 \\ B_{(j)} \end{bmatrix} \delta\lambda_{(j)} + \begin{bmatrix} e_\xi - (\lambda_{(j)}^T \otimes I_n)e_A \\ e_A \\ e_B \\ -(\lambda_{(j)}^T \otimes I_m)e_B \end{bmatrix} \quad (16)$$

式中,  $I_n$  和  $I_m$  分别表示  $n$  维和  $m$  维单位阵;  $\otimes$  为 Kronecker 积算子, 推导利用了关系式  $\text{vec}(ABC) = (C^T \otimes A)\text{vec}(B)$ 。对应推估模型的标准形式(8), 可得各个变量为:

$$\begin{aligned} y &= \xi - A\lambda_{(j)} \\ C &= A_{(j)}, e_y = e_\xi - (\lambda_{(j)}^T \otimes I_n)e_A \\ y_0 &= \begin{bmatrix} e_A \\ e_B \\ g - B\lambda_{(j)} \end{bmatrix}, C_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ B_{(j)} \end{bmatrix} \\ e_{y_0} &= \begin{bmatrix} e_A \\ e_B \\ -(\lambda_{(j)}^T \otimes I_m)e_B \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (17)$$

顾及式(17)  $e_y$  和  $e_{y_0}$  及式(7), 根据协方差传播律推出  $Q_{yy}, Q_{y_0y}$  分别为:

$$Q_{yy} = Q_{\xi\xi} + (\lambda_{(j)}^T \otimes I_n)Q_{AA}(\lambda_{(j)} \otimes I_n) \quad (18)$$

$$Q_{y_0y} = \begin{bmatrix} -Q_{AA}(\lambda_{(j)} \otimes I_n) \\ -Q_{BA}(\lambda_{(j)} \otimes I_n) \\ (\lambda_{(j)}^T \otimes I_m)Q_{BA}(\lambda_{(j)} \otimes I_n) \end{bmatrix} \quad (19)$$

根据上述中的无偏参数和预报值的公式可以推出:

$$\hat{\delta\lambda}_{(j)} = (A_{(j)}^T Q_{yy}^{-1} A_{(j)})^{-1} A_{(j)}^T Q_{yy}^{-1} (\xi - A\lambda_{(j)}) \quad (20)$$

$$e_A = -Q_{AA}(\lambda_{(j)} \otimes I_n)Q_{yy}^{-1} (\xi - A\lambda_{(j)} - A_{(j)}\hat{\delta\lambda}_{(j)}) \quad (21)$$

$$e_B = -Q_{BA}(\lambda_{(j)} \otimes I_n)Q_{yy}^{-1} (\xi - A\lambda_{(j)} - A_{(j)}\hat{\delta\lambda}_{(j)}) \quad (22)$$

$$g = B\lambda_{(j)} + B_{(j)}\hat{\delta\lambda}_{(j)} - (\lambda_{(j)} \otimes I_n)e_B \quad (23)$$

其中, 式(20)、(21)式用于估计高程异常转换参数, 式(22)、(23)用于计算待求点的高程异常值。由于预报和估计是相对独立的过程, 因此只需要按照式(20)、(21)计算转换参数, 迭代终止后, 再按式(22)、(23)计算最后的推估值。

### 2.2 系数误差协方差阵的计算

求解两种模型需要已知  $Q_{AA}, Q_{BA}$ , 定义变量

$$E_z = \begin{bmatrix} E_{z_1} \\ E_{z_2} \end{bmatrix}, \text{其中 } E_{z_1} = \begin{bmatrix} E_{A_1} \\ \vdots \\ E_{A_n} \end{bmatrix} \text{ 和 } E_{z_2} = \begin{bmatrix} E_{A_{n+1}} \\ \vdots \\ E_{A_{n+m}} \end{bmatrix} \text{ 分}$$

别为  $n$  个已知高程异常点和  $m$  个未知高程异常点的平面坐标误差。其对应的协方差阵为  $Q = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{bmatrix}$ 。

由系数矩阵的表达式, 结合误差传播定律可以得到:

$$\begin{aligned} e_{A_i} &= \text{vec}(E_{A_i}) = \\ & \begin{bmatrix} 0 & e_{x_i} & e_{y_i} & 2x_i e_{x_i} & e_{x_i} y_i + e_{y_i} x_i & 2y_i e_{y_i} \end{bmatrix}^T \end{aligned} \quad (24)$$

$$\text{并可推出 } e_{A_i} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2x_i & 0 \\ y_i & x_i \\ 0 & 2y_i \end{bmatrix} \times e_{p_i}, e_{p_i} = \begin{bmatrix} e_{x_i} \\ e_{y_i} \end{bmatrix}。$$

则  $n$  个点系数矩阵误差可以写成:

$$\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 2x_1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 2x_n & 0 & \cdots & 0 \\ y_1 & \cdots & 0 & x_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & y_n & 0 & \cdots & x_n \\ 0 & \cdots & 0 & 2y_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 2y_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{x_1} \\ \vdots \\ e_{x_n} \\ e_{y_1} \\ \vdots \\ e_{y_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ e_{x_1} \\ \vdots \\ e_{x_n} \\ e_{y_1} \\ \vdots \\ e_{y_n} \\ 2x_1 e_{x_1} \\ \vdots \\ 2x_n e_{x_n} \\ e_{x_1} y_1 + e_{y_1} x_1 \\ \vdots \\ e_{x_n} y_n + e_{y_n} x_n \\ 2y_1 e_{y_1} \\ \vdots \\ 2y_n e_{y_n} \end{bmatrix} \quad (25)$$

分别令:

$$J = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n \times n} & \mathbf{0}_{n \times n} \\ \mathbf{I}_n & \mathbf{0}_{n \times n} \\ \mathbf{0}_{n \times n} & \mathbf{I}_n \\ 2\mathbf{X}_n & \mathbf{0}_{n \times n} \\ \mathbf{Y}_n & \mathbf{X}_n \\ \mathbf{0}_{n \times n} & 2\mathbf{Y}_n \end{bmatrix}, K = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{m \times m} & \mathbf{0}_{m \times m} \\ \mathbf{I}_m & \mathbf{0}_{m \times m} \\ \mathbf{0}_{m \times m} & \mathbf{I}_m \\ 2\mathbf{X}_m & \mathbf{0}_{m \times m} \\ \mathbf{Y}_m & \mathbf{X}_m \\ \mathbf{0}_{m \times m} & 2\mathbf{Y}_m \end{bmatrix}。$$

其中,

$$\mathbf{X}_n = \begin{bmatrix} x_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & x_n \end{bmatrix}, \mathbf{Y}_n = \begin{bmatrix} y_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & y_n \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{X}_n = \begin{bmatrix} x_{n+1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & x_{n+m} \end{bmatrix}, \mathbf{Y}_n = \begin{bmatrix} y_{n+1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & y_{n+m} \end{bmatrix}$$

可得到  $\mathbf{E}_A = J \times \mathbf{E}_{z_1}, \mathbf{E}_B = K \times \mathbf{E}_{z_2}$ 。

根据误差传播定律,可以得到:

$$\begin{bmatrix} Q_{AA} & Q_{AB} \\ Q_{BA} & Q_{BB} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} JQ_{11}J^T & JQ_{12}K^T \\ KQ_{21}J^T & KQ_{22}K^T \end{bmatrix} \quad (26)$$

式中,  $\begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{bmatrix}$  为已知高程异常点和待求高程异常点的平面坐标之间的的协方差阵,在实际生产中,一般可以通过对所有点进行测边网平差或者 GPS 基线向量解算来获得,在本文的算例中,通过对模拟的测边网进行平差计算得到。

### 3 算例和分析

选取 14 个点,将其中的 A、B 两点作为起始坐标点,模拟距离观测值,建立一个测边网,计算其他 12 个点的坐标平差值及其协方差阵,选取 2、6、8、9 号点作为检验点,各点的坐标真值如表 1 所示。图 1 为这 14 个点的空间分布,可以看出所有数据点的空间分布较为均匀。令

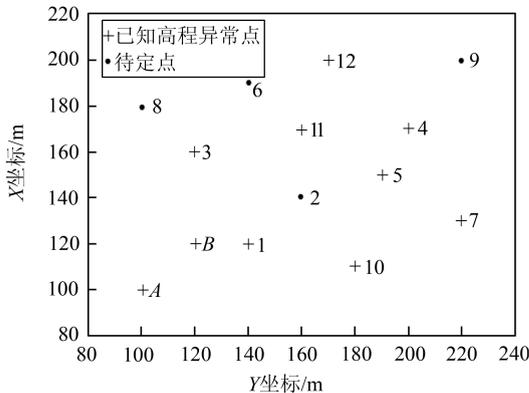


图 1 测边网点的空间分布

Fig. 1 Spatial Distribution of Trilateration Net's Point

表 1 各点坐标、高程异常/m

Tab. 1 Coordinates and Height Anomaly of Points/m

点号	X	Y	$\xi$
A	100	100	-
B	120	120	-
1	120	140	-87.8
3	160	120	149.8
4	170	200	-187.5
5	150	190	-225
7	130	220	-524.1
10	110	180	-336.3
11	170	160	35.3
12	200	170	144
2	140	160	-102.4
6	190	140	220.9
8	180	100	294
9	200	220	-151

$$(b_0, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5) =$$

$$(-11, 0.05, 0.1, 0.01, 0.009, -0.02)$$

为二次多项式曲面高程异常转换参数的真值<sup>[6]</sup>,并根据坐标真值及参数真值计算高程异常的真值。

反算两点间的边长作为距离的真值  $S_0$ ,并对  $S_0$  添加服从正态分布  $N(0, \sigma^2)$  的随机误差作为距离的观测值,其中,  $\sigma = a + b \times S$ ,本文中计算取常数  $a = 5 \text{ mm}, b = 0.05 \text{ mm/km}$ 。联合所有距离误差方程,权取距离方差的倒数,计算得到这 12 个点的坐标平差值及其协方差阵。再给高程异常的真值添加服从正态分布  $N(0, \sigma_\xi^2)$  随机误差,作为高程异常的观测值,其中  $\sigma_\xi^2$  为测边网平差过程中计算得到的单位权方差,得到的平差坐标值及含有误差的高程异常值如表 2 所示。

表 2 各点平差坐标、加入误差的高程异常/m

Tab. 2 Adjusted Coordinates and Add the Abnormal Height of Error/m

点号	X	Y	$\xi$
A	100	100	-
B	120	120	-
1	119.997 9	140.000 6	-87.798 0
3	159.989 1	120.001 7	149.795 9
4	170.011 9	199.980 9	-187.495 4
5	150.013 1	189.987 9	-224.997 6
7	130.016 7	219.995 4	-524.100 7
10	110.008 0	180.000 5	-336.299 9
11	170.006 2	159.987 1	35.300 2
12	200.013 5	169.973 9	144.003 0
2	140.003 4	159.996 6	-102.396 2
6	190.003 3	139.983 0	220.899 8
8	179.962 3	100.003 3	293.999 2
9	200.005 6	219.983 8	-151.001 1

本文中采用的方案如表 3 所示,其中方案 5 所采用的定权方法,是根据协因数传播定律求得

协因数之间的相互关系,并考虑到协因数会随点的不同而变化,为了方便起见,对定权的方法做了一定的简化<sup>[4]</sup>;方案 4 则引用了文献[8]中采用的加权总体最小二乘迭代计算的方法,该方法直接采用系数矩阵的协方差阵进行计算。

表 3 各方案所用方法列表

Tab. 3 List of Methods Used in Different Schemes

方案	方法
方案 1	本文提出方法
方案 2	最小二乘法
方案 3	总体最小二乘法
方案 4	加权总体最小二乘法 <sup>[8]</sup>
方案 5	加权总体最小二乘法 <sup>[4]</sup>

各个方案的计算结果如表 4 所示,从计算结果的比较中可以看出,采用传统最小二乘方法和总体最小二乘方法的计算结果差别并不大;两种

加权总体最小二乘法解算精度较好,方案 5 采用的是简化的定权方法,而方案 4 根据协因数阵进行计算,方案 4 的计算方法相对方案 5 而言更加合理,且方案 4 的转换效果也优于方案 5。但是,不论采用何种加权总体最小二乘方法,仍然存在着目前关于总体最小二乘方法在 GPS 高程转换的研究中普遍存在的不足,即将转换参数的计算与待求点高程异常计算分两步进行处理,并且只考虑由高程异常已知点的平面坐标组成的系数矩阵的误差,忽略了高程异常待求点的坐标误差。方案 1 将计算转换参数和计算检验点高程异常联合处理,且考虑到所有点的点位误差,从理论上来说该方案要更为严谨与合理,从计算的结果可以看出,该方案相对其他 4 种方案,转换精度有所提高。

表 4 检验点转换的结果及与真值的残差范数/m

Tab. 5 Checkpoint's Result of the Transformation and Norm of Residual Between the Estimated Value and True Value/m

方案	点号				
	$\hat{\xi}_2$	$\hat{\xi}_6$	$\hat{\xi}_8$	$\hat{\xi}_9$	$\ \Delta\hat{\xi}\ $
真值	-102.4	220.9	294	-151	-
方案 1	-102.394 2	220.901 8	293.896 6	-151.149 4	0.181 7
方案 2	-102.413 5	220.914 5	293.929 7	-151.186 5	0.200 3
方案 3	-102.413 5	220.914 5	293.929 7	-151.186 5	0.200 3
方案 4	-102.405 1	220.893 1	293.900 7	-151.154 6	0.183 9
方案 5	-102.413 5	220.914 5	293.929 7	-151.186 5	0.199 3

## 4 结 语

本文考虑到由高程异常待求点组成的系数矩阵中的误差,并且将计算高程异常转换参数与计算待求点的高程异常联合处理,提出了 GPS 高程转换拟合推估模型,结合模拟数据进行转换参数的计算以及解算结果精度的评定。模拟算例的计算结果表明,本文方法能够得到更高精度的高程转换结果。

## 参 考 文 献

[1] Xu Shaoquan, Zhang Huahai, Yang Zhiqiang, et al. GPS Measurement Principle and Application[M]. Wuhan: Wuhan University Press, 2008 (徐绍铨, 张华海, 杨志强, 等. GPS 测量原理及应用[M]. 武汉: 武汉大学出版社, 2008)

[2] Wang Leyang, Xu Caijun. Progress in Total Least Square[J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2013, 38(7): 850-856 (王乐洋, 许才军. 总体最小二乘研究进展[J]. 武汉大学

学报·信息科学版, 2013, 38(7): 850-856)

[3] Ding Haiyong, Sun Jingling. Research on Total Least-Squares Methods for Transformation of GPS Elevation[J]. *Journal of Geodesy and Geodynamics*, 2013, 33(3): 52-55 (丁海勇, 孙景领. GPS 高程转换的总体最小二乘方法研究[J]. 大地测量与地球动力学, 2013, 33(3): 52-55)

[4] Zhao Hui, Zhang Shubi, Zhang Qiuzhao. GPS Height Fitting of Weighted Total Least-Squares Adjustment[J]. *Journal of Geodesy and Geodynamics*, 2011, 31(5): 88-90 (赵辉, 张书毕, 张秋昭. 基于加权总体最小二乘法的 GPS 高程拟合[J]. 大地测量与地球动力学, 2011, 31(5): 88-90)

[5] Gong Xunqiang, Chen Qing, Zhou Xiufang. The Application Research of GPS Height Fitting Based on TLS Adjustment Method[J]. *Bulletin of Surveying and Mapping*, 2014(3): 6-8 (龚循强, 陈馨, 周秀芳. 总体最小二乘平差方法在 GPS 高程拟合中的应用研究[J]. 测绘通报, 2014(3): 6-8)

[6] Tao Y Q, Gao J X, Yao Y F. TLS Algorithm for GPS Height Fitting Based on Robust Estimation [J]. *Survey Review*, 2014, 46(336): 184-188

[7] Li Bofeng, Shen Yunzhong, Li Weixiao. The Seam-

- less Model for Three-Dimensional Datum Transformation[J]. *Sci China Earth Sci*, 2012, 42(7): 1 047-1 054 (李博峰, 沈云中, 李薇晓. 无缝三维基准转换模型[J]. 中国科学(地球科学), 2012, 42(7): 1 047-1 054)
- [8] Mahboub V. On Weighted Total Least-Squares for Geodetic Transformations[J]. *Journal of Geodesy*, 2012, 86(5): 359-367
- [9] Lu Tieding, Ning Jinsheng. Total Least Squares Adjustment Theory and Its Applications[M]. Beijing: China Science and Technology Press, 2011(鲁铁定, 宁津生. 总体最小二乘平差理论及其应用[M]. 北京: 中国科学技术出版社, 2011)
- [10] Wang Leyang. Trilateration Net's Coordinate Adjustment Based on Total Least Squares[J]. *Journal of Geodesy and Geodynamics*, 2012, 32(6): 81-85 (王乐洋. 测边网坐标的总体最小二乘平差方法[J]. 大地测量与地球动力学, 2012, 32(6): 81-85)
- [11] Kong Jian, Yao Yibin, Wu Han. Iterative Method for Total Least-Squares[J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2010, 35(6): 711-714(孔建, 姚宜斌, 吴寒. 整体最小二乘的迭代解法[J]. 武汉大学学报·信息科学版, 2010, 35(6): 711-714)
- [12] Tao Benzao, Qiu Weining, Yao Yibin. Error Theory and Foundation of Surveying Adjustment[M]. Wuhan: Wuhan University Press, 2009 (陶本藻, 邱卫宁, 姚宜斌. 误差理论与测量平差基础[M]. 武汉: 武汉大学出版社, 2009)
- [13] Li Lihua, Gao Jingxiang, Liu Jinbin. Discussion of the Methods of the Covariance Function Prediction for the Fitting of Abnormal Height[J]. *Engineering of Surveying and Mapping*, 2005, 14(4): 33-35 (李丽华, 高井祥, 刘晋斌. 协方差函数拟合高程异常方法探析[J]. 测绘工程, 2005, 14(4): 33-35)
- [14] Wang Zengli, Huang Teng, Deng Biao. Application of Collocation Model Based on Quadric Surface in GPS Leveling Surveying[J]. *Engineering of Surveying and Mapping*, 2009, 18(1): 50-52(王增利, 黄腾, 邓标. 基于二次曲面的拟合推估法在GPS高程测量中的应用[J]. 测绘工程, 2009, 18(1): 50-52)
- [15] Teunissen P J G, Simons D, Tiberius C. Probability and Observation Theory[M]. The Netherlands: Delft University of Technology, 2008

## Total Least Squares Fitting Estimation Model for GPS Height Transformation

WANG Leyang<sup>1,2</sup> WU Fei<sup>1,3</sup> WU Liangcai<sup>1</sup>

1 Faculty of Geomatics, East China Institute of Technology, Nanchang 330013, China

2 Key Laboratory of Watershed Ecology and Geographical Environment Monitoring, NASG, Nanchang 330013, China

3 School of Environment Science and Spatial Informatics, China University of Mining and Technology, Xuzhou 221116, China

**Abstract:** In the current research on the total least squares method in the conversion of GPS height, the calculation of the conversion parameter and elevation abnormalities of the check points are generally performed in two steps, and only consider the error in the coefficient matrix used to calculate the parameters; errors in the coordinate of the check point are ignored. In view of this gap, we put forward a total least squares fitting estimation model of GPS height transformation, that combines the calculation of fitting parameters with the calculation of elevation abnormalities at inspection points, and considers the position error of all points. Collocation calculation experimental results verify the feasibility of this method. These test results show that the method can effectively improve the accuracy of elevation conversion.

**Key words:** total least squares; collocation; GPS elevation; elevation transformation; polynomial fitting

**First author:** WANG Leyang, PhD, associate professor, specializes in geodetic inversion and geodetic data processing. E-mail: wleyang@163.com

**Foundation support:** The National Natural Science Foundation of China, No. 41204003; Science and Technology Project of the Education Department of Jiangxi Province, Nos. GJJ150595; KJLD12077; KJLD14049; Key Laboratory of Watershed Ecology and Geographical Environment Monitoring, NASG, No. WE2015005; Key Laboratory of Mapping from Space, NASG, No. K201502; National Department Public Benefit Research Foundation (Surveying, Mapping and Geoinformation), No. 201512026; Scientific Research Foundation of ECIT, No. DHBK201113; Support Program for Outstanding Youth Talents in Jiangxi Province; National Key Research and Development Program, No. 2016YFB0501405.