

利用正交化方法确定独立基线及独立双差模糊度

任 锴^{1, 2} 宋小勇³ 贾小林³

1 地理信息工程国家重点实验室, 陕西 西安, 710054
2 西安测绘信息技术总站, 陕西 西安, 710054
3 西安测绘研究所, 陕西 西安, 710054

摘 要:介绍了利用 Gram-Schmidt 正交化算法构建独立向量集的原理, 并利用关联矩阵和向量权的思想构建独立基线向量集和独立双差模糊度向量集, 讨论了三种构建双差模糊度向量的特点, 给出了选择独立基线和独立双差模糊度的正交化算法。通过一个全球 GPS 网定轨算例, 给出了计算结果, 验证了方法的有效性。
关键词:Gram-Schmidt 正交化; 独立基线; 独立双差模糊度; 关联矩阵
中图法分类号:P228.41 **文献标志码:**A

在 GNSS 相位观测值数据处理中, 如精密相对定位和精密轨道确定^[1], 以及利用 GNSS 基线解的基线网平差数据处理^[2], 需要依据某种优先原则选取独立基线和独立双差模糊度, 以得到最优网平差解和模糊度固定解。对独立数据集的选取, 其实质可归结为在一组向量中寻找满足一定约束条件的最大线性无关集。文献[3]提出了利用关联矩阵法构造最大权独立向量集的方法。该方法可选择独立基线和独立双差模糊度, 并可向更高维向量扩展, 由于其利用了关联矩阵求秩运算, 算法思路较简明, 但是矩阵求秩运算较复杂^[4]。Bernese 软件^[5]在选取独立基线时, 给出了一种给基线端点逐级设标识的最短路径算法, 但该方法并不适用于独立双差模糊度的选取。文献[1, 6]探讨了独立双差模糊度选取的 Gram-Schmidt 方法。本文推导了 Gram-Schmidt 正交化算法构建独立向量集原理, 由于算法基于一般向量集, 具有通用性, 不限于处理独立基线、独立双差模糊度选择问题。在构造向量集时可参考文献[3]关联矩阵和向量权的思想。

1 独立向量集构造

1.1 独立基线

在独立基线选取时, 其基线向量的构造方式可借鉴关联矩阵^[3]的设计。假定有 n 个测站, 全

部测站从 1 至 n 排序, 一条基线对应一个向量, 基线向量维数为 n 维, 假设基线 $\overrightarrow{P_i P_j}$ 的起点为第 i 测站, 终点为第 j 测站, 则对应基线向量第 i 元素为 1, 第 j 元素为 -1, 其余元素为 0, 如此构造全部基线向量。由基线向量定义可知, 向量点积为 2。

按基线的边长进行排序, 第一条基线向量直接选入独立基线集, 并单位化, 之后逐个基线向量按 Gram-Schmidt 正交化算法进行判定, 最终得到最短(长)独立基线集。

1.2 独立双差模糊度

构造独立双差模糊度向量集主要有以下 3 种方式:

1) 基于非差模糊度。在非差相位数据处理中, 一个测站对一颗卫星的观测值称为一个非差观测, 对应的模糊度称为非差模糊度。一个双差观测值由两个测站及同步观测的 2 颗卫星共 4 个非差观测组差构成, 相应的双差模糊度是这 4 个非差模糊度间的线性组合。一个双差模糊度对应一条基线, 一条基线包括多个双差模糊度。设有双差模糊度 $\Delta \nabla N_{ab}^j$, 对应测站为 a, b , 卫星为 i, j , 可由 4 个非差模糊度 $N_b^j, N_a^i, N_b^i, N_a^j$ 线性组成, 表示为:

$$\Delta \nabla N_{ab}^j = N_b^j - N_b^i - N_a^j + N_a^i \quad (1)$$

假定一条基线有 n 个非差模糊度, 给全部非差模糊度从 1 至 n 排序号, 一个双差模糊度对应一个向量, 向量维数为 n 维, 如双差模糊度 $\Delta \nabla N_{ab}^j$

所形成的向量设计如下:非差模糊度 N_b^i, N_a^i 所对应序号的向量元素设为 1,非差模糊度 N_b^i, N_a^i 所对应序号的向量元素设为 -1,其余元素为 0,如此构造所有双差模糊度向量,此时向量点积为 4。

按形成双差模糊度有效同步观测时间或双差模糊度可固定为整数的概率为权,将该基线所有双差模糊度按权大小排序,第一个双差模糊度对应向量直接选入独立双差模糊度集,并单位化,之后逐个双差模糊度按正交化算法进行判定,得到该基线的最优独立双差模糊度。

全网独立双差模糊度的选取,可先逐个基线选独立双差模糊度,之后对这些选出的双差模糊度进行独立性判断,得到整网的独立双差模糊度。也可以先选择独立基线,之后对逐条独立基线按非差模糊度方式选独立双差模糊度,所有选出的双差模糊度构成整网的独立双差模糊度。

2) 基于站间单差模糊度。两个测站同步观测 1 颗卫星,相应的两个非差观测量组差,形成站间单差观测量,对应的模糊度为站间单差模糊度。式(1)可整理为式(2),表明一个双差模糊度由两个站间单差模糊度组成。

$$\Delta N_{ab}^{ij} = (N_b^j - N_a^j) - (N_b^i - N_a^i) = \nabla N_{ab}^j - \nabla N_{ab}^i \tag{2}$$

选全网的独立双差模糊度集,首先进行独立基线的选择,之后按顺序逐条处理独立基线。处理一条基线时,两端测站已知,将此基线的所有卫星形成的 n 个站间单差模糊度进行排序并编号,双差模糊度向量维数为 n ,则一个双差模糊度 ΔN_{ab}^{ij} ,卫星 j 所对应单差模糊度 ∇N_{ab}^j 相应序号的向量元素为 1,卫星 i 所对应单差模糊度 ∇N_{ab}^i 相应序号的向量元素为 -1,其余向量元素为 0,如此构造该基线所有双差模糊度向量,向量点积为 2。

将该基线所有双差模糊度按权排序,独立集的选择方法同前。对独立基线逐条处理,直至选出全部独立基线的独立双差模糊度集,如此形成的全网双差模糊度集显然是独立的。

3) 基于星间单差模糊度。1 个测站同步观测两颗卫星,相应的两个非差观测量组差,形成星间单差观测量,对应的模糊度为星间单差模糊度。式(1)可整理为式(3),表明一个双差模糊度由两个星间单差模糊度构成。

$$\Delta N_{ab}^{ij} = (N_b^j - N_b^i) - (N_a^j - N_a^i) = \nabla N_b^j - \nabla N_b^i - \nabla N_a^j + \nabla N_a^i \tag{3}$$

选全网的独立双差模糊度集,首先进行独立卫星对的选择,如采用设定参考星的星型方式。

之后按顺序逐个处理独立卫星对。处理一个卫星对时,两端卫星已知,将此卫星对的所有测站形成的 n 个星间单差模糊度进行排序编号,向量维数为 n ,则一个双差模糊度 ΔN_{ab}^{ij} ,测站 b 所对应单差模糊度 ∇N_b^j 相应序号的向量元素为 1,测站 a 所对应单差模糊度 ∇N_a^j 相应序号的向量元素为 -1,其余元素为 0,构造该星对全部双差模糊度向量,向量点积为 2。

独立模糊度集的选择方法同前。对独立卫星对逐个进行,直至选出全部独立双差模糊度集,显然,所选出总的双差模糊度集是独立的。

对以上 3 种方式比较可知,方式(2)、(3)在选独立双差模糊度集时,每个向量只有两个非 0 元素,方式(1)为 4 个非 0 元素;对同样的一条基线或者星对,方式(1)向量维数由基线的非差模糊度数决定,其明显高于单差模糊度数,即向量的维数高;方式(1)可以针对所有基线或是星对处理,然后对初选的双差模糊度再选独立双差模糊度,方式(2)、(3)需针对独立基线、独立星对分步进行。由此,可根据观测网形复杂程度等选择不同的独立双差模糊度选择方式,适应计算效率、内存开销需求的不同。

2 Gram-Schmidt 正交化算法原理

假定已有的线性无关向量集经 Gram-Schmidt 正交化处理,得到矩阵 E (包含正交单位向量 $e_i, i=1, \cdots, n$),维数为 $m \times n, m$ 为向量维数, n 为已定义的独立向量个数。对一个新向量 a ,判定其是否与已有线性无关向量集相关,可首先假设其相关,即假设向量 a 可由向量 e_i 线性表示:

$$a = \sum_{i=1}^n c_i \cdot e_i \tag{4}$$

系数 c_i 利用正交单位向量性质,有:

$$a \cdot e_i = \left(\sum_{k=1}^n c_k \cdot e_k \right) \cdot e_i = c_i, i=1, \cdots, n \tag{5}$$

利用正交单位向量性质,还可以得到关系式:

$$a \cdot a = \left(\sum_{i=1}^n c_i \cdot e_i \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^n c_i \cdot e_i \right) = \sum_{i=1}^n c_i^2 \tag{6}$$

由此得到判断准则: $|a \cdot a - \sum_{i=1}^n c_i^2| < \epsilon$, 当假设成立时, ϵ 应为某个很小的值,表明向量 a 可由已有独立向量集的向量线性表达;否则向量 a

应为新增的独立向量,独立向量集 $\mathbf{E}$ 增加为 $m \times (n+1)$ 维。

对于新增线性无关向量,可利用 Gram-Schmidt 正交化^[7],再单位化,变为新的正交向量基。正交化过程中可利用正交单位向量的性质,得到正交单位化方法:

$$\mathbf{e}_{n+1}^1 = \mathbf{a} - \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_1}{\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1} \mathbf{e}_1 - \cdots -$$

(7)

$$\frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_n}{\mathbf{e}_n \cdot \mathbf{e}_n} \mathbf{e}_n = \mathbf{a} - \sum_{i=1}^n c_i \cdot \mathbf{e}_i$$

(8)

$$\mathbf{e}_{n+1} = \frac{\mathbf{e}_{n+1}^1}{\|\mathbf{e}_{n+1}^1\|}$$

这样,通过对所有候选向量按照某种优先权顺序排序,第一条向量直接选入独立向量集,并单位化,之后的向量按照顺序逐个进行判断,最终得到最大权独立向量集。

该方法有明显的优势,从推导过程可以看出,该方法可以处理高维向量集,正交化算法较简单,不需复杂的计算,新增独立向量的处理可利用先期判断部分的已有结果,新增计算量小。

3 算 例

选择一个全球网 GPS 精密事后定轨算例,包括 IGS 全球分布的 100 个测站,24 h 一个定轨弧段,观测 29 颗卫星,采样间隔 300 s。对于这样一个大网,利用非差无电离层相位、伪距观测数据,在模糊度实数解之后,组双差模糊度,实现模糊度固定解。

在选择独立双差模糊度时,按照正交化方法,首先在基线长小于 4 000 km 的 605 条基线中选择独立基线,共 99 条,计算时不需要对所有基线判别,只要判定独立基线数达 99 个时,即可终止计算。图 1 为测站和选定的独立基线示意图。

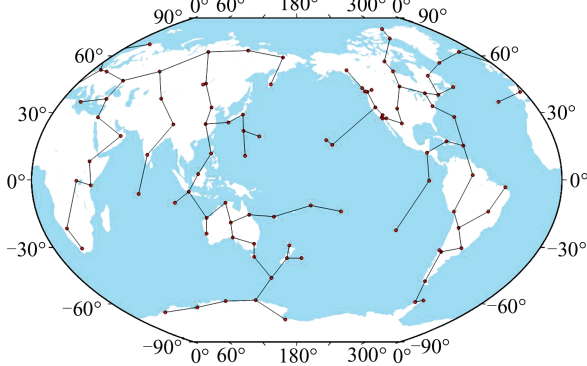


图 1 独立基线示意图
Fig. 1 Network Map of Independent Baselines

然后,对每条独立基线的独立双差模糊度进行选择,以宽巷和窄巷双差模糊度可固定为整数的概率为权,双差模糊度向量的构造基于非差模糊度。统计每条独立基线的独立双差模糊度选择情况见表 1,限于篇幅,表中仅列出几条基线情况并给出总计情况。

由结果可知,605 条基线中选择最短路径独立基线共 99 条,而 99 条独立基线总计形成了 31 485 个双差模糊度,其中只有 5 635 个独立双差模糊度,独立双差模糊度数占双差模糊度数的 17.9%。该正交化方法很好的实现了独立基线、独立双差模糊度的选取。

表 1 独立双差模糊度选取情况
Tab. 1 Selection Statistics of Independent Double-difference Ambiguity

基线号	双差模糊 度数	独立双差 模糊度数	独立双差模糊度 数占比
1	278	45	0.162
2	248	47	0.190
3	288	46	0.160
4	231	48	0.208
5	277	45	0.163
6	319	46	0.144
7	271	50	0.185
8	327	50	0.153
9	457	63	0.138
10	360	53	0.147
...	...	...	...
总计	31 485	5 635	0.179

4 结 语

选择独立基线、独立双差模糊度,在 GNSS 高精度数据处理中,非常重要,尤其在大网数据处理中,好的选取方法,可以减小计算量,提高计算效率。而利用 Gram-Schmidt 正交化方法选择独立基线、独立双差模糊度,算法较为简洁,本文给出了详细的算法原理。在建立向量集的过程中,可参考关联矩阵、向量权思想。本文三种双差模糊度向量集构造方式的讨论表明,根据不同的条件,可选择不同的方式。最后通过一个包括 100 个测站的定轨实例,表明 Gram-Schmidt 正交化方法的有效性。

致谢:感谢 GFZ 葛茂荣研究员在算法上给予的指导。感谢 IGS 提供的基准站数据。

参 考 文 献

[1] Ge Maorong, Gendt G, Dick G, et al. Improving

Carrier-Phase Ambiguity Resolution in Global GPS Network Solution[J]. *Journal of Geodesy*, 2005 (4):103-110

[2] Shi Chuang. The Theory and Application of the Large Scale and High Precision GPS Network Adjustment and Analysis[D]. Wuhan, Wuhan University,1999 (施闯. 大规模、高精度 GPS 网平差处理与分析理论及其应用[D]. 武汉:武汉大学,1999)

[3] Wang Lei, Li Pan, Lv Cuixan. Application of Vertex Incidence Matrix Algorithm to Independent Baselines Search and Independent Double-Difference Ambiguity Selection[J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2010, 35 (6): 715-718(王磊,李盼,吕翠仙. 关联矩阵法在独立基线及独立双差模糊度选择中的应用[J]. 武汉大学学报·信息科学版,2010,35(6): 715-718)

[4] Xue Dingyu. Scientific Computing Language Matlab5.3 Program Design and Application[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2000(薛定宇. 科学运算语言 Matlab5.3 程序设计与应用[M]. 北京:清华大学出版社,2000)

[5] Dach R, Hugentobler U, Fridez P, et al. Bernese GPS Software Version 5.0[R]. Astronomical Institute, University of Bern, 2007

[6] NAPEOS, Mathematical Models and Algorithms [R]. European Space Operation Centre,2009

[7] Gong Dongbao, Wei Zhanxian. University Mathematics Tutorial (Second Volume): Linear Algebra and Space Analytic Geometry[M]. Xi'an: Xi'an Jiao Tong University Press, 2000(龚冬保,魏战线. 大学数学教程(第2卷):线性代数与空间解析几何[M]. 西安:西安交通大学出版社,2000)

Using Orthogonal Transformation Method to Select Independent Baselines and Independent Double-difference Ambiguities

REN Kai^{1,2} SONG Xiaoyong³ JIA Xiaolin³

1 Skate Key Laboratory of Geo-Information Engineering, Xi'an 710054, China
2 Xi'an Technical Division of Surveying and Mapping, Xi'an 710054, China
3 Xi'an Research Institute of Surveying and Mapping, Xi'an 710054, China

Abstract: The principle of constructing independent vector sets using Gram-Schmidt orthogonal transformation is proposed. The method of setting independent baseline and independent double-difference ambiguity data sets refers to the idea of vertex incidence matrix and vector weight. The three ways to build double-difference ambiguity data sets are discussed. The computing process of selecting independent baselines and independent double-difference ambiguities is provided. An example of orbit determination using global GPS track nets is tested. The result shows that the orthogonal transform algorithm is effective.

Key words: Gram-Schmidt method; independent baselines; independent double-difference ambiguity; vertex incidence matrix

First author: REN Kai, PhD, specializes in GNSS theory research and data processing. E-mail: Rpvt1204@163.com

Foundation support: The National Natural Science Foundation of China, Nos. 41074020, 41204020; the Open Research Fund Program of Skate Key Laboratory of Geo-Information Engineering, No. SKLGIE2015-M-1-2.