第39卷第9期 武汉大学学报·信息科学版 Vol. 39 No. 9
2014年9月 Geomatics and Information Science of Wuhan University Sept. 2014

DOI:10.13203/j.whugis20140241 文章编号:1671-8860(2014)09-1009-08

GNSS整周模糊度确认理论方法研究进展

刘经南[1,2] 邓辰龙[1,2] 唐卫明[1]

1 武汉大学GNSS中心,湖北 武汉,430079
2 武汉大学测绘学院,湖北 武汉,430079

摘 要:从模糊度确认的理论基础出发,对目前存在的主要模糊度确认方法进行了分类,并对各方法的优缺点进行了分析,强调了各方法的理论背景与实用性情况,并展望了模糊度确认方法的研究前景。

关键词:模糊度确认;数学模型;成功率;假设检验;整数孔径估计
中图法分类号:P228.41 文献标志码:A

GNSS整周模糊度解算是利用载波相位观测值进行厘米级至毫米级高精度定位的核心内容,包括模糊度估计与模糊度确认两个部分[1]。其中,模糊度估计分为两步:首先,通过标准最小二乘解算,获得模糊度的浮点解及其精度信息;然后,采用一定的搜索算法,将浮点模糊度固定为整数[2],属于整数最小二乘(integer least squares, ILS)问题。模糊度确认则是从概率统计角度出发,判断估计所得到的整周模糊度是否能被接受为正确的模糊度值,属于假设检验问题。

对于模糊度估计问题,从20世纪80年代开始就有众多学者进行了研究,并陆续提出了许多搜索算法,主要分为三类,即在观测值域内搜索的双频码相组合法[3-5]、在坐标域内搜索的模糊度函数法[6-7](ambiguity function method, AMF),以及在模糊度域内搜索的最小二乘模糊度搜索方法[8]、快速模糊度确定方法[9](fast ambiguity resolution approach, FARA)和最小二乘模糊度降相关平差方法[2,10](least-square ambiguity decorrelation adjustment, LAMBDA)。其中,LAMBDA方法通过整数变换,降低了模糊度之间的相关性,缩小了模糊度的搜索范围,效果明显,为目前广泛使用的搜索算法。

对模糊度确认问题的系统性研究起步较晚。虽然过去有若干学者提出不同的模糊度确认方法[9,11-14],但并没有相应的理论框架。近十年来,随着整数估计中的成功率[15-16]及整数孔径估计理论[17-18]的提出与发展,模糊度确认问题与模糊度估计问题一起作为整体进行考虑分析,模糊度确认被归入整数孔径估计理论框架中[19]。但截至目前,仍有若干问题亟待解决。

错误的整周模糊度将导致分米级甚至更大的定位偏差,而判断整周模糊度是否固定正确,依赖于有效的模糊度确认方法。模糊度确认的正确性将直接影响模糊度解算的可靠性,也必将影响定位结果的准确性。因此,研究整周模糊度确认的理论方法,具有重要的理论意义和实用价值。

本文从模糊度确认的检验基础和成功率两方面出发,分析模糊度确认方法的理论基础。然后,根据目前存在的各模糊度确认方法的性质,将模糊度确认方法分为三类。接着,从模糊度确认方法的理论背景及实用性角度出发,对各方法的优缺点进行评析。最后,指出目前模糊度确认仍存在的问题,并对其研究发展进行了相应的展望。

1 模糊度确认理论基础

早期的模糊度确认方法是从模糊度估计的数学模型出发,通过假设检验来判别模糊度最优解与次优解是否具有显著区别,从而确定最优模糊

收稿日期:2014-03-31
项目来源:国家杰出青年科学基金资助项目(41325015);国家自然科学基金资助项目(41004014);国家863计划资助项目(2012AA12A202);长江科学院开放研究基金资助项目(CKWV2012312/KY);中央高校基本科研业务费专项资金资助项目(2012214020208)。
第一作者:刘经南,中国工程院院士,教授,博士生导师。主要从事现代测量数据处理理论与应用研究。E-mail: jnliu@whu.edu.cn
通讯作者:唐卫明,博士,教授。E-mail:wmtang@whu.edu.cn

度组为正确固定的模糊度组，或拒绝搜索得到的最优解而采用浮点解定位结果。近年来，模糊度固定成功率被逐渐提及，并已作为新的模糊度确认指标应用于模糊度解算。

1.1 早期检验理论

GNSS载波相位定位的数学模型可表示为：

$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{b}+\boldsymbol{e},\ \boldsymbol{D}(\boldsymbol{y})=\sigma_0^2\boldsymbol{Q}_y \tag{1}$$

式(1)前半部分为函数模型，后部分为对应的随机模型。其中，$\boldsymbol{a}$ 为 m 维模糊度参数向量；$\boldsymbol{b}$ 为包括基线分量和其他实数参数的 t 维向量；观测向量 $\boldsymbol{y}$ 的维数为 n；$\boldsymbol{A}$ 为模糊度的系数，为对应波长组成的对角阵；$\boldsymbol{B}$ 为实数参数的系数矩阵；$\boldsymbol{e}$ 为观测误差；$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{y})$ 为观测值的方差矩阵；$\boldsymbol{Q}_y$ 为协因数矩阵；σ_0 为先验标准差。

在模糊度解算时，首先根据最小二乘原理进行模糊度估计，在获取了浮点模糊度 $\hat{\boldsymbol{a}}$ 及其协因数阵 $\boldsymbol{Q}_{\hat{a}}$ 后，通过一定的搜索策略得到数个具有整数特性的模糊度备选组 $\check{\boldsymbol{a}}_i$，最后进行模糊度确认。在模糊度解算过程中，浮点解的残差 $\boldsymbol{V}_0$ 为：

$$\boldsymbol{V}_0=\boldsymbol{y}-\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{a}}-\boldsymbol{B}\hat{\boldsymbol{b}} \tag{2}$$

式中，$\hat{\boldsymbol{b}}$ 为实数参数的浮点解。结合观测值权矩阵 $\boldsymbol{P}$，浮点解残差的二次型 Ω_0 为：

$$\Omega_0=\boldsymbol{V}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{V}_0 \tag{3}$$

验后单位权方差为：

$$\hat{\sigma}_0^2=\frac{\boldsymbol{V}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{V}_0}{n-m-t}=\frac{\Omega_0}{n-m-t} \tag{4}$$

第 i 组模糊度的残差二次型 R_i 为：

$$R_i=(\hat{\boldsymbol{a}}-\check{\boldsymbol{a}}_i)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_{\hat{a}}^{-1}(\hat{\boldsymbol{a}}-\check{\boldsymbol{a}}_i) \tag{5}$$

备选模糊度对应固定解的残差二次型 Ω_i 为：

$$\Omega_i=\Omega_0+R_i \tag{6}$$

1.1.1 接受性检验

1）浮点解。当已知先验方差时，在获得了浮点解后，需进行接受性检验。设 α 为显著性水平，则需满足以下两个检验条件[20-21]：

$$\frac{\hat{\sigma}_0^2}{\sigma_0^2}<F_\alpha(n-m-t,\infty) \tag{7}$$

$$\sigma_0^2\cdot\chi^2_{1-\alpha/2}(n-m-t)<\Omega_0<\sigma_0^2\cdot\chi^2_{\alpha/2}(n-m-t) \tag{8}$$

式中，F_α 和 χ^2_α 分别为 α 置信水平下的F－分布和 χ^2-分布，其他字母符号同前。若先验方差未知，则不用进行该项检验。

2）固定解。当获得了模糊度备选组的固定解后，需再次进行接受性检验，检验标准[20,22]为：

$$\frac{R_i/m}{\Omega_0/(n-m-t)}=\frac{R_i}{m\hat{\sigma}_0^2}<F_\alpha(m,n-m-t) \tag{9}$$

此外，文献[14]还给出了两个附加条件，即：

$$\begin{gathered}(\hat{\boldsymbol{b}}-\hat{\boldsymbol{b}}_a)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_{\hat{b}}^{-1}(\hat{\boldsymbol{b}}-\hat{\boldsymbol{b}}_a)\leqslant t\cdot\hat{\sigma}_0^2\cdot F_\alpha(t,n-m-t)\\ \hat{\sigma}_0^2\cdot\chi^2_{n-t;1-\alpha/2}<\Omega_i<\hat{\sigma}_0^2\cdot\chi^2_{n-t;\alpha/2}\end{gathered} \tag{10}$$

式中，$\hat{\boldsymbol{b}}_a$ 为实数参数的固定解；$\boldsymbol{Q}_{\hat{b}}$ 为实数参数浮点解的协因数阵。

如果所有模糊度均未能通过上述检验，则说明所建立的数学模型与实际情况不符，需要进一步考虑模型中未包含的其他偏差，精化大气误差模型或随机模型。如果仅有一组模糊度通过了上述检验，则可直接将该组模糊度作为正确模糊度组进行基线向量的固定解解算而无需进行区别性检验。如果通过上述检验准则的模糊度超过两组，则说明模型检验无法区分 R 最小及次小的模糊度组，无法直接判定 R 最小的模糊度组为正确解算的模糊度组，因此需进一步通过区别性检验来判断该组模糊度是否能够被确认[1]。

1.1.2 区别性检验

如上所述，当通过接受性检验的模糊度超过两组时，则需要进行区别性检验。该检验是为了从统计理论出发，通过构建特定的假设检验统计量，判定 R 最小的模糊度组与 R 次小的模糊度组是否具有显著区别，从而视最优模糊度组为正确固定的模糊度组。

在假设检验中，容易发生两类错误：第一类错误是弃真，即模糊度正确固定，但是假设检验拒绝了该组模糊度，其概率 α 称为置信水平，也被称为误警概率；第二类错误是取伪，即模糊度固定错误，但是假设检验接受了该组模糊度，其概率为 β，其中 $1-\beta$ 称作检验功率。在模糊度确认问题中，α 可适当选大，但是 β 必须控制在很小的范围内，因为接受固定错误的模糊度将导致定位结果出错。

1.2 成功率

成功率的概念是为估计模糊度固定成功的概率而提出的。模糊度的估计方法主要分为三类，即直接取整、整数序贯取整和整数最小二乘。直接取整及整数序贯取整的估计量分别为：

$$\begin{gathered}\check{\boldsymbol{a}}_R=([\hat{a}_1]\ \ \cdots\ \ [\hat{a}_n])^{\mathrm{T}}\\ \check{\boldsymbol{a}}_B=([\hat{a}_1]\ \ \cdots\ \ [\hat{a}_{n|N}])^{\mathrm{T}}\end{gathered} \tag{11}$$

式中，“[]”为取整符号；$[\hat{a}_{n|N}]$ 表示条件取整，其表达式为：

$$[\hat{a}_{k|N}]=[\hat{a}_k-\sum_{i=1}^{k-1}\sigma_{\hat{a}_k\hat{a}_{i|I}}\sigma^{-2}_{\hat{a}_{i|I}}(\hat{a}_{i|I}-[\hat{a}_{i|I}])] \tag{12}$$

直接取整成功率 P_R 和整数序贯取整成功率 P_B 的

关系[15]为：

$$\prod_{i=1}^{m}\left(2\Phi\left(\frac{1}{2\sigma_{\hat{a}_i}}\right)-1\right)\leqslant P(\check{a}_R=a)\leqslant$$

$$\prod_{i=1}^{m}\left(2\Phi\left(\frac{1}{2\sigma_{\hat{a}_{i|I}}}\right)-1\right)=P(\check{a}_B=a) \qquad (13)$$

式中，$\Phi(x)$为标准正态分布函数。

整数最小二乘的估计量无法直接给出，需根据整数最小二乘准则通过建立搜索空间进行搜索求得。整数最小二乘的成功率 P_{ILS} 为浮点模糊度的概率密度函数在其归整域内的积分，无法直接进行数值积分计算。近似地，可用降相关后的 P_B 作为 P_{ILS} 的下边界[23]，或：

$$\left[2\Phi\left(\frac{1}{2\sqrt{\lambda_{\max}}}\right)-1\right]^m\leqslant P_{\mathrm{ILS}}\leqslant$$

$$\left[2\Phi\left(\frac{1}{2\sqrt{\lambda_{\min}}}\right)-1\right]^m \qquad (14)$$

式中，$\lambda_{\max}$ 和 $\lambda_{\min}$ 分别为模糊度协因数阵 $Q_{\hat{a}}$ 的最大、最小特征值；m 为模糊度维数。

2　模糊度确认方法

针对模糊度确认问题，不同学者提出了不同的解决方法，主要可分为三类，包括基于最优与次优模糊度组的统计可区分度的区别性检验方法、基于模糊度估计理论框架下成功率/失败率指标的判定方法及结合两者的综合法。

2.1　统计量区别检验方法

统计量区别检验方法的思路是构建某一特定的假设检验统计量，通过分析该统计量的分布情况，确定在给定的置信水平下该统计量的阈值大小。对于未知分布情况的统计量，则通过实际情况给出合理的阈值。

统计量区别检验方法包括 F-ratio 检验[9]、R-ratio 检验[11]、差别检验[12]、投影检验[14]、W-rati 检验[13]及基于模型可分离度的方法[24]。其中，R-ratio 检验和 W-ratio 检验分别是从 F-ratio 检验及差别检验发展而来的，是两种较为常用的模糊度确认方法。

2.1.1　F-ratio 检验

F-ratio 检验即整数解中最小与次小验后差的显著性检验。由于整数解的验后方差为：

$$\hat{\sigma}_0^2=\frac{\Omega}{f}=\frac{\Omega_0+R}{n-t} \qquad (15)$$

式中，f 为自由度。则 F-ratio 检验可表述为：

$$T=\frac{\hat{\sigma}_{0s}^2}{\hat{\sigma}_{0m}^2}=\frac{\Omega_s}{\Omega_m}=\frac{\Omega_0+R_s}{\Omega_0+R_m}\geqslant F_\alpha(f,f) \qquad (16)$$

式中，下角标 s 和 m 分别对应各参数的次小与最小值。

该检验假设最小与次小的验后方差是相互独立的，则统计量 T 服从 F－分布。因此，给定置信水平 α，可求出检验的阈值。在实际生产中，一般设定阈值为 3。

2.1.2　R-ratio 检验

R-ratio 检验是在 F-ratio 检验的基础上发展而来的。该检验将式(6)中实数参数固定解的残差二次型替换为模糊度的残差二次型：

$$T=\frac{R_s}{R_m} \qquad (17)$$

相比 F-ratio 检验统计量，该统计量能更方便地在模糊度搜索结束后立刻获得，操作更为简单。同时，由于该检验的结果与实际情况较为相符，因此该检验基本取代了 F-ratio 检验，成为目前主要使用的模糊度确认方法。在实际生产中，该统计量的阈值一般也设为 3。

2.1.3　差别检验

差别检验是通过计算两个模糊度的残差二次型的差异大小，来判断最优模糊度组是否可被视为正确的模糊度组。

设 $T(\check{a}_i)=\hat{\sigma}_0^{-2}R_i$，则差别检验的统计量为：

$$\Delta T(\check{a}_s,\check{a}_m)=T(\check{a}_s)-T(\check{a}_m)>K \qquad (18)$$

其中，K 为阈值。研究表明，当观测到 7 颗 GPS 卫星时，阈值推荐设为 15。由于方差一致，则式(18)等价于：

$$T=R_s-R_m>\hat{\sigma}_0^2K \qquad (19)$$

2.1.4　W-ratio 检验

W-ratio 检验同时考虑两组固定解残差二次型的差异及其协方差阵，通过作比来构建一个新的检验统计量。

设 $d=\Omega_s-\Omega_m$ 为次优与最优模糊度组对应固定解残差二次型之差，其协因数为：

$$Q_d=4(\check{a}_s-\check{a}_m)^{\mathrm{T}}Q_{\hat{a}}^{-1}(\check{a}_s-\check{a}_m) \qquad (20)$$

则 W-ratio 检验的统计量可表示为：

$$W=\frac{d}{\sqrt{\mathrm{Var}(d)}} \qquad (21)$$

式中，$\mathrm{Var}(d)$ 为 d 的方差。当已知先验方差 σ 时，统计量变为：

$$W_a=\frac{d}{\sigma\sqrt{Q_d}}\sim N(0,1) \qquad (22)$$

即服从标准正态分布，其接受域为：

$$W_a>N(0,1;1-\alpha) \qquad (23)$$

当采用验后方差 $\hat{\sigma}_0$ 时，统计量变为：

$$W_s=\frac{d}{\hat{\sigma}_0\sqrt{Q_d}}=\frac{d/\sqrt{\sigma^2Q_d}}{\sqrt{\Omega_0/(\sigma^2f)}}\sim t(f) \qquad (24)$$

式中，f 为自由度。该统计量服从学生 t-分布，其接受域为：

$$W_s > t_\alpha(f) \tag{25}$$

2.2 成功率/失败率指标方法

成功率/失败率指标方法是在模糊度估计理论框架下，解算得到近似的成功率或失败率。当成功率足够大或者失败率足够小时，认为模糊度固定成功。

在模糊度估计理论框架中，影响模糊度固定成功率的因素包括浮点模糊度的概率密度函数及构建的归整域区间。根据归整域定义的不同，模糊度估计类可分为整数估计类和整数孔径（integer rperture，IA）估计类。

2.2.1 整数估计类

整数估计[25]仅考虑模糊度估计完成后的两个结果，即成功或者失败，其归整域的定义为：

① $\bigcup_{z\in\mathbb{Z}^n} S_z = \mathbb{R}^n$；② $\mathrm{Int}(S_u)\cap\mathrm{Int}(S_z)=\varnothing$，$\forall \boldsymbol{u},\boldsymbol{z}\in\mathbb{Z}^n,\boldsymbol{u}\neq\boldsymbol{z}$；③ $S_z=\boldsymbol{z}+S_0,\forall \boldsymbol{z}\in\mathbb{Z}^n$。

式中，S_z 表示 ILS 的归整域；Int（$*$）表示归整域对应的整数模糊度组；S_0 表示原始归整域；z 为平移向量。上述定义中的第一个条件说明归整域是无缝的，所有备选模糊度组的归整域构成了整个实数集；第二个条件说明不同模糊度组的归整域是不重叠的，表明浮点模糊度固定是个多对一的投影过程；第三个条件说明不同模糊度组的归整域具有平移不变性，即：

$$S(\hat{\boldsymbol{a}}-\boldsymbol{z})+\boldsymbol{z}=S(\hat{\boldsymbol{a}}) \tag{26}$$

整数估计类包括直接取整、整数序贯取整和整数最小二乘三种。由于在模糊度估计时，主要采用 ILS 估计量来搜索模糊度，因此，本文主要讨论 ILS 的归整域，其范围可表述为：

$$S_z = \{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n \mid \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}\|^2_{Q_{\hat{a}}} \leqslant \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{u}\|^2_{Q_{\hat{a}}},\forall \boldsymbol{u}\in\mathbb{Z}^n\} \tag{27}$$

式中，z 为归整域 S_z 对应的整数向量；$\|*\|^2_{Q_{\hat{a}}}$ 为协方差二次型。式(27)可进一步变形为：

$$S_z = \bigcap_{c\in\mathbb{Z}^n}\left\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n \,\middle|\, |\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_{\hat{a}}^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z})| \leqslant \frac{1}{2}\|\boldsymbol{c}\|^2_{Q_{\hat{a}}}\right\} \tag{28}$$

ILS 的成功率可表示为：

$$P_{s,\mathrm{ILS}} = P(\check{\boldsymbol{a}}=\boldsymbol{a}) = \int_{S_a} f_{\hat{a}}(\boldsymbol{x})\mathrm{d}x \tag{29}$$

式中，被积函数 $f_{\hat{a}}(x)$ 为浮点模糊度的概率密度函数，其分布视为高斯正态分布。

如果计算出的 ILS 成功率近似值大于设定的阈值（如 0.99），则认为模糊度固定成功，否则认为模糊度固定失败。

2.2.2 整数孔径估计类

整数孔径估计[18]在整数估计的基础上，结合模糊度确认，将模糊度估计的结果由两种拓展至三种，即成功、失败或不确定。当模糊度估计完成后为不确定时，只能采用模糊度浮点解。IA 估计的归整域定义为：① $\bigcup_{z\in\mathbb{Z}^n} U_z = U$；② $\mathrm{Int}(U_u)\cap\mathrm{Int}(U_z)=\varnothing,\forall \boldsymbol{u},\boldsymbol{z}\in\mathbb{Z}^n,\boldsymbol{u}\neq\boldsymbol{z}$；③ $U_z=\boldsymbol{z}+U_0,\forall \boldsymbol{z}\in\mathbb{Z}^n$。式中，$U$ 为全体 IA 估计的归整域集合；U_0 表示初始归整域，其他同上。从定义式可以看出，相比于整数估计，IA 估计取消了归整域的无缝性要求，所有归整域的集合不再是整个实数空间。当浮点模糊度未落在任一归整域内时，说明最优模糊度组不能被视为正确固定的模糊度，只能采用浮点解。

IA 估计类的定义式可表述为：

$$\bar{\boldsymbol{a}} = \sum_{z\in\mathbb{Z}^n} \boldsymbol{z}\omega_z(\hat{\boldsymbol{a}}) + \hat{\boldsymbol{a}}\left(1-\sum_{z\in\mathbb{Z}^n}\omega_z(\hat{\boldsymbol{a}})\right) \tag{30}$$

式中的指示函数：

$$\omega_z(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1, \boldsymbol{x}\in U_z \\ 0, \text{其他} \end{cases} \tag{31}$$

假设 U_a 为正确的归整域，则由 IA 估计类的定义可得出三种估计结果，分别为：

1) $\hat{\boldsymbol{a}}\in U_a$，说明浮点模糊度落在正确的归整域内，将得到正确的模糊度估值，即模糊度固定成功；

2) $\hat{\boldsymbol{a}}\in U\backslash U_a$，说明浮点模糊度落在错误的归整域内，将得到错误的模糊度估值，即模糊度固定失败；

3) $\hat{\boldsymbol{a}}\notin U$，说明浮点模糊度没有落在归整域内，搜索得到的整数模糊度不可靠，即模糊度无法固定，只能采用浮点解结果。

相应地，整数孔径估计三种不同结果对应的概率，即成功率 P_s、失败率 P_f 和不确定率 P_u，分别为：

$$\begin{aligned} P_s &= P(\bar{\boldsymbol{a}}=\boldsymbol{a}) = \int_{U_a} f_{\hat{a}}(\boldsymbol{x})\mathrm{d}x \\ P_f &= \sum_{z\in\mathbb{Z}^n\backslash\{a\}} \int_{U_z} f_{\hat{a}}(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \\ &\int_{U_0} f_{\check{\varepsilon}}(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} - \int_{U_a} f_{\hat{a}}(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} \\ P_u &= 1-P_s-P_f = 1-\int_{U_0} f_{\check{\varepsilon}}(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} \end{aligned} \tag{32}$$

式中，$f_{\check{\varepsilon}}(x)$ 为固定解残差的概率密度函数。模糊度固定的成功率则可表示为：

$$P_{s|\bar{a}=z} = \frac{P_s}{P_s+P_f}$$

由IA估计的成功率定义式可知，IA估计的成功率亦由浮点模糊度的概率密度函数及其归整域决定。前者由实际场景决定，在测量时无法改变。模糊度估计的归整域由形状和大小两个因素决定，它的形状由所选的确认方法确定，方法选定后形状无法更改；归整域的大小由所选的阈值确定。

值得一提的是，在整数孔径估计类中，存在不同的方法[26-30]（如椭球整数孔径估计、整数孔径最小二乘估计等），并将得到不同的成功率。换言之，存在最优整数孔径估计量，使得对于给定失败率，模糊度估计得到最大成功率。另一方面，根据IA估计的概念，所有统计量区别检验方法均可视为该估计类的一个实例。

由于IA估计包含成功、失败和不确定三个结果，因此，如果计算出的失败率大于设定的最小失败率（如0.05），则认为模糊度无法固定，采用浮点解；如果计算出的失败率很小，且固定成功率接近于1，则认为模糊度成功固定。

2.3　组合方法

以上两类方法分别从两种不同的角度来判断模糊度是否正确固定，因此可以将这两类方法结合起来，既考虑统计量的阈值，同时计算模糊度固定的成功率或失败率，从而提高模糊度固定的可靠性。

在具体实现上，针对所采用的估计理论的不同，有两种组合形式。如果是采用基于整数估计类的ILS方法，则直接在统计量区别检验方法的基础上，增加一个ILS成功率指标阈值，联合判断模糊度是否固定，属于“松组合”方法。如果是采用基于IA估计类的方法，则可将统计量区别检验的阈值与IA估计的归整域联系起来，通过控制失败率大小来确定统计量区别检验的阈值大小，再判断模糊度是否固定，属于“紧组合”方法。

前一种组合方式中，两类方法相互独立，互不影响，简单易实现，本文不再赘述。由于R-ratio检验是最为常用的区别检验方法，因此，有学者提出了基于IA估计类的R-ratio检验法，即固定失败率的ratio检验法[31-32]，通过固定最小失败率来反算R-ratio检验的阈值大小。后来又在此基础上发展了变长的固定失败率ratio检验法[33]，缩短了模糊度固定所需时间；或针对归整域过于狭长的情况，提出同时联合孔径重叠的椭球整数孔径估计和R-ratio检验的方法[34]，提高了正确固定率。还有国内学者将归整域近似展开，然后构造新的归整域，求得了区别检验的阈值与失败率之间的直接关系式[35]；但是，由于其构造的归整域忽略掉了归整域的边缘区间，计算的失败率比实际失败率偏小。

3　模糊度确认方法评析

3.1　第一类方法

基于统计量区别检验的方法主要包括构建统计量并确定阈值，如F-ratio和R-ratio的统计量是次优模糊度组与最优模糊度组的残差平方和（或对应固定解的残差平方和）的比值；差别检验的统计量是次优模糊度组与最优模糊度组的残差平方和的差值；而W-ratio检验的统计量是次优模糊度组与最优模糊度组的固定解残差二次型的差与其协方差阵的比值。这些统计量的表达式都十分简单，在计算过程中容易实现。

在进行模糊度确认时，统计量的阈值一般是根据统计量的分布情况来确定的，而这些统计量的分布都是基于一定的假设。F-ratio检验方法假设最小与次小的验后方差是相互独立的，但实际上这个假设并不成立，即F-ratio检验的统计量并不服从F-分布[36]。W-ratio检验方法根据观测值服从正态分布，推出固定解残差二次型的差也服从正态分布，但由于两个备选模糊度组不独立，因此推导的结果也不成立[20]，则W-ratio检验的统计量也不符合正态分布（已知先验方差时）或学生t-分布（求得验后方差时）。而对于R-ratio检验和差别检验而言，它们的分布情况更不明确。由以上分析可知，无法由给定的置信水平严密地确定统计量的阈值，而通常只是根据经验来给定一个固定阈值。在实际情况中，该阈值可能偏大，导致固定率偏低；或阈值偏小，导致正确率偏低。总而言之，这类方法在构建统计量或确定阈值大小时存在理论错误。

3.2　第二类方法

基于成功率/失败率指标的方法从模糊度估计理论出发，通过对浮点模糊度的概率密度函数在归整域区间内进行数值积分来确定模糊度解算的成功率，理论上十分严密。同时，整数序贯取整的成功率可以直接计算得到，计算较为方便。

但是，由于ILS和IA估计的归整域的复杂表达，导致积分过程十分复杂，成功率无法直接求出，只能通过计算成功率的上限和下限来给出近似的成功率值。

需要指出的是，求得的近似成功率与实际统计的模糊度固定正确率也存在一定差异。在某些

情况下，即使模糊度估计的成功率很高，但实际得到的模糊度也可能是错误的。导致这种情况发生的原因可能是由于成功率大小依赖于浮点模糊度的精度，但其对模型误差不敏感[37]。

3.3 第三类方法

采用统计量区别检验与成功率/失败率指标双重判断标准的方法较易操作，提高了模糊度确认的标准，从而提高了模糊度的固定正确率，但是降低了模糊度的固定率。在实时定位时，可能会延长模糊度的初始化时间。换言之，此策略是以初始化时间换取模糊度固定的可靠性。

采用基于IA估计类的R-ratio检验方法直接将R-ratio检验纳入IA估计理论中，理论上更为严密，但该方法在实用性方面存在一定缺陷[37]，主要表现为：

1）如果依赖于仿真算法计算阈值，则不同大小样本仿真得到的P_f和P_s不同。样本大小在一定程度上决定了确认结果的可靠性，但大样本会带来严重的计算负担，无法用于实时定位。另外，即使样本容量相同，结果也会有变化。

2）如果采用查询表的方法选择阈值，由于查询表是事先通过建模仿真建立得到的，有时所用的模型不符合真实测量环境，无法反映卫星的几何变化，导致确认结果不可靠。

3）与第二类方法一样，在实际应用中，模糊度估计的成功率不能正确反映实际的固定正确率，两者之间存在差异。

4 结　语

GNSS整周模糊度确认是模糊度解算中必不可少的步骤，也是目前卫星导航定位领域的一个难点问题，隶属于质量控制的范畴。正确的模糊度确认是厘米级甚至毫米级载波相位定位的前提条件，也是获得可靠的载波相位定位结果的要求。

整周模糊度确认理论与方法的研究从最初的通过构造各种统计量（如R-ratio统计量、W-ratio统计量等）选择阈值来判断模糊度是否固定，到估计ILS模糊度的成功率大小来判断最优模糊度组是否可靠，发展到现在基于IA理论框架的模糊度确认方法，理论上越来越严密。但是，这类严密的方法由于计算量巨大或仿真与实际情况不符等问题的存在，至今仍无法广泛应用于实践。

从IA估计理论的角度来分析，当浮点模糊度精度较差时，不存在使固定率及固定成功率同时最大的模糊度确认方法。若要保证较大的模糊度固定率，则将导致较大的固定失败率；若要保证较小的失败率，则模糊度固定率也将随之降低。因此，在模糊度确认理论完善之前，最重要的还是在求解浮点模糊度时，通过精化函数模型及随机模型，获取较高精度的浮点模糊度。当浮点模糊度精度足够高时，最优的模糊度组则可通过接受性检验直接正确固定。

参 考 文 献

[1] Kleusberg A, Teunissen P J G. GPS for Geodesy [M]. Berlin, Heidelberg: Springer, 1996

[2] Teunissen P J G. Least-Squares Estimation of the Integer GPS Ambiguities[C]. General Meeting of IAG, Beijing, China, 1993

[3] Hatch R R. The Synergism of GPS Code and Carrier Measurements[C]. The 3rd International Geodetic Symposium on Satellite Doppler Positioning. New Mexico State University, Las Cruces, NM, 1982

[4] Melbourne W. The Case for Ranging in GPS Based Geodetic Systems[C]. The First Symposium on Precise Positioning with the Global Positioning System, Positioning with GPS, Rockville, MD, 1985

[5] Wübbena G. Software Developments for Geodetic Positioning with GPS Using TI-4100 Code and Carrier Measurements[C]. The First Symposium on Precise Positioning with the Global Positioning System, Positioning with GPS, Rockville, MD, 1985

[6] Remondi B W. Pseudo-Kinematic GPS Results Using the Ambiguity Function Method[J]. *Navigation*, 1991, 38(1): 17-36

[7] Remondi B W. Using the Global Positioning System (GPS) Phase Observable for Relative Geodesy: Modeling, Processing, and Results[D]. Texas: The University of Texas, 1984

[8] Hatch R R. Instantaneous Ambiguity Resolution [C]. IAG International Symposium No. 107, Banff, Alberta, Canada, 1990

[9] Frei E, Beutler G. Rapid Static Positioning Based on the Fast Ambiguity Resolution Approach FARA: Theory and First Results[J]. *Manuscripta Geodaetica*, 1990, 15(4): 325-356

[10] Teunissen P J G. The Least-Squares Ambiguity Decorrelation Adjustment: A Method for Fast GPS Integer Ambiguity Estimation[J]. *Journal of Geodesy*, 1995, 70(1): 65-82

[11] Euler H J, Schaffrin B. On a Measure for the Discernibility Between Different Ambiguity Solutions in the Static-Kinematic GPS-Mode[C]. Kinematic Systems in Geodesy, Surveying, and Remote Sens-

ing, IAG, Banff, Alberta, Canada, 1991

[12] Tiberius C C J M, de Jonge P J. Fast Positioning Using the LAMBDA Method[C]. The DSNS, Bergen, Norway, 1995

[13] Wang J, Stewart M P, Tsakiri M. A Discrimination Test Procedure for Ambiguity Resolution On-the-Fly[J]. *Journal of Geodesy*, 1998, 72 (11): 644-653

[14] Han S. Quality Control Issues Relating to Instantaneous Ambiguity Resolution for Real-Time GPS Kinematic Positioning[J]. *Journal of Geodesy*, 1997, 71 (6): 351-361

[15] Teunissen P J G. Success Probability of Integer GPS Ambiguity Rounding and Bootstrapping[J]. *Journal of Geodesy*, 1998, 72 (10): 606-612

[16] Teunissen P J G. An Optimality Property of the Integer Least-Squares Estimator[J]. *Journal of Geodesy*, 1999, 73 (11): 587-593

[17] Teunissen P J G, Verhagen S. On the Foundation of the Popular Ratio Test for GNSS Ambiguity Resolution[C]. The 17th International Technical Meeting of the Satellite Division, Long Beach, CA, 2004

[18] Verhagen S, Teunissen P J G. New Global Navigation Satellite System Ambiguity Resolution Method Compared to Existing Approaches[J]. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2006, 29 (4): 981-991

[19] Teunissen P J G, Verhagen S. Integer Aperture Estimation: A Framework for GNSS Ambiguity Acceptance Testing[J]. *Inside GNSS*, 2011, 6 (2): 66-73

[20] Verhagen S. Integer Ambiguity Validation: an Open Problem?[J]. *GPS Solutions*, 2004, 8 (1): 36-43

[21] Han S, Rizos C. Integrated Methods for Instantaneous Ambiguity Resolution Using New-Generation GPS Receivers[C]. The IEEE PLANS, Atlanta, GA, 1996

[22] Han S, Rizos C. Validation and Rejection Criteria for Integer Least-Squares Estimation[J]. *Survey Review*, 1996, 33 (260): 375-382

[23] Teunissen P J G. The Success Rate and Precision of GPS Ambiguities[J]. *Journal of Geodesy*, 2000, 74(3): 321-326

[24] Chen Yongqi. An Approach to Validate the Resolved Ambiguities in GPS Rapid Positioning [J]. *Journal of Wuhan Technical University of Surveying and Mapping*, 1997, 22 (4): 342-345 (**陈永奇. 一种检验 GPS 整周模糊度解算有效性的方法**[J]. **武汉测绘科技大学学报**, 1997, 22 (4): 342-345)

[25] Teunissen P J G. An Optimality Property of the Integer Least-squares Estimator[J]. *Journal of Geodesy*, 1999, 73 (11): 587-593

[26] Teunissen P J G. A Carrier Phase Ambiguity Estimator with Easy-to-Evaluate Fail-Rate[J]. *Artificial Satellites*, 2003, 38 (3): 89-96

[27] Teunissen P J G. Integer Aperture Bootstrapping: A New GNSS Ambiguity Estimator with Controllable Fail-Rate[J]. *Journal of Geodesy*, 2005, 79 (6/7): 389-397

[28] Teunissen P J G. Integer Aperture Least-Squares Estimation[J]. *Artificial Satellites*, 2005, 40 (3): 149-160

[29] Teunissen P J G. Penalized GNSS Ambiguity Resolution[J]. *Journal of Geodesy*, 2004, 78 (4/5): 235-244

[30] Teunissen P J G. GNSS Ambiguity Resolution with Optimally Controlled Failure-Rate[J]. *Artificial Satellites*, 2005, 40 (4): 219-227

[31] Teunissen P J G, Verhagen S. The GNSS Ambiguity Ratio-Test Revisited: A Better Way of Using It [J]. *Survey Review*, 2009, 41 (312): 138-151

[32] Verhagen S, Teunissen P J G. The Ratio Test for Future GNSS Ambiguity Resolution[J]. *GPS Solutions*, 2013, 17(4): 535-548

[33] Tandy M, Young K W. Variable Duration Fixed Failure Rate Ambiguity Resolution[J]. *GPS Solutions*, 2013, 17 (1): 121-127

[34] Ji S, Chen W, Ding X, et al. Ambiguity Validation with Combined Ratio Test and Ellipsoidal Integer Aperture Estimator[J]. *Journal of Geodesy*, 2010, 84 (10): 597-604

[35] Pan Shuguo, Deng Jian, Wang Qing. New Method for the Rightness Inspection of Ambiguity Solution Based on Mathematical Statistics[J]. *Chinese Journal of Scientific Instrument*, 2012, 33 (3): 708-714(**潘树国, 邓健, 王庆. 一种新的基于数理统计的模糊度正确性检验方法**[J]. **仪器仪表学报**, 2012, 33 (3): 708-714)

[36] Li T, Wang J. Some Remarks on GNSS Integer Ambiguity Validation Methods[J]. *Survey Review*, 2012, 44 (326): 230-238

[37] Wang J, Stewart M P, Tsakiri M. A Comparative Study of the Integer Ambiguity Validation Procedures[J]. *Earth Planet Space*, 2000, 52 (10): 813-817

Review of GNSS Ambiguity Validation Theory

LIU Jingnan[1,2] *DENG Chenlong*[1,2] *TANG Weiming*[1]

1 Research Center of GNSS, Wuhan University, Wuhan 430079, China

2 School of Geodesy and Geomatics, Wuhan University, Wuhan 430079, China

Abstract: Ambiguity resolution is a core issue in high precision GNSS carrier phase positioning, including both ambiguity estimation and ambiguity validation. Ambiguity estimation fixes the float ambiguity to its integer value utilizing its precision information: an integer least-squares problem. Ambiguity validation evaluates the estimated ambiguity and whether it can be treated as the correct: a probability statistics problem. Incorrectly validated ambiguity can lead to wrong positioning results at the decimeter or larger bias. Therefore, ambiguity validation will have a direct impact on the reliability of ambiguity resolution and positioning results based on the theory of ambiguity validation. We introduce several widely used ambiguity validation methodologies. The advantages and disadvantages of each method are compared and analyzed, from the perspective of the background theory and practicability. At last, we address the outlook for future research in ambiguity validation.

Key words: ambiguity validation; mathematical model; success rate; hypothesis test; integer aperture estimation

First author: LIU Jingnan, Academician of Chinese Academy of Engineering, professor, PhD supervisor, specializes in the research of modern measurement data processing, GNSS technology and software development, as well as large project implementation. E-mail: jnliu@whu.edu.cn

Corresponding author: TANG Weiming, PhD, professor. E-mail: wmtang@whu.edu.cn

Foundation support: The National Science Foundation for Distinguished Young Scholars of China, No. 41325015; the National Natural Science Foundation of China, No. 41004014; the National 863 Program of China, No. 2012AA12A202; the CRSRI Open Research Program, No. CKWV2012312/KY; the Fundamental Research Funds for the Central Universities, No. 2012214020208.