

滇中引水工程独立坐标系统建立的关键技术研究

张 辛¹ 杨爱明¹ 许其凤² 姜本海¹

1 长江勘测规划设计研究院,湖北 武汉,430010

2 信息工程大学导航与空天目标工程学院,河南 郑州,450001

摘 要:云南滇中引水工程具有测区跨度长、平均海拔高、高差变化大等特点,独立坐标系统的建立难度大。本文根据投影变形理论,结合滇中引水工程的特点,提出了适用性的建立独立坐标系统的关键技术解决方案。用 1°带的分带方式替代常规的国家 3°带分带,有效地控制工程的高斯投影变形;推导了新的适用于高原长距离工程的抵偿投影面求取方法,并结合滇中引水工程实际给出了优化的抵偿投影面设置方案。使用本文建议的独立坐标系统,工程综合变形的最大值能得到最优控制。

关键词:滇中引水;高程归化;高斯改化;1°带;抵偿投影面

中图法分类号:P258

文献标志码:A

云南有 6 大水系,拥有水总量 2 200 亿 m³;但占云南省 2/5 的人口、2/3 的生产总值的滇中地区的水资源量仅占全省的 12%。在金沙江上游实施引水工程,可以从根本上解决滇中严重缺水现状。滇中引水工程受水区包括丽江、昆明、大理、楚雄、玉溪及红河共 31 个县区,供水对象特别重要。工程渠首设计流量 145 m³/s,多年平均调水量 34.2 亿 m³,工程规模巨大。宏伟的工程必须有一流的测绘保障。整体设计,统一部署,建立工程施工测量控制网,使沿线各建设管理、设计、施工和监理单位在一个统一精度、标准的框架控制下开展工作,对于工程的顺利开展具有重要意义^[1-4]。

滇中引水工程全长共 850.65 km,其中,东西跨度约 400 km,南北跨度约 545 km。引水线路从海拔 2 064 m 至海拔 1 401 m,具有测区跨度长、平均海拔高、高差变化大等特点。在工程测量的各类规范中,对测距边的长度变形值均有严格的要求,以保证坐标反算边长与实地量测边长的较小误差,但对于高原长距离工程,存在测区远离中央子午线与平均高程较大的问题。若使用国家坐标系统会导致测距边的投影变形大,难以满足工程实践的精度要求,往往需要建立工程独立坐标系统^[5-6]。因此,针对滇中引水工程特点,建立适当的独立坐标系统,将边长的投影变形控制在

工程允许的范围内是项目研究面临的关键技术问题。

1 理论基础

1.1 高程归化变形

在水利水电工程测量规范中,把水平距离归算到特定高程面上的测距边长度为:

$$D_0 = D \times \left(1 + \frac{H_p - H_m}{R_A} \right) \quad (1)$$

式中, D_0 为归算到特定高程面上的测距长度; D 为测距边水平距离; H_p 是特定的高程,一般为任务书规定的高程或选择的抵偿投影面高程; H_m 为测距边高出大地水准面的平均高程; R_A 为测距边所在的法截线的曲率半径。图 1 所示为高程归化示意图。

分析式(1)可以得出,将测距边归算到特定高程面上会有变形影响,归算边长的相对变形,即特定高程面的高程归化值可表示为:

$$\Delta S_0 = \frac{D_0 - D}{D} = \frac{H_p - H_m}{R_A} \quad (2)$$

相应地,把测距边归算到参考椭球面上的测距边长度则为:

$$D_1 = D \times \left(1 - \frac{H_m + h_m}{R_A + H_m + h_m} \right) \quad (3)$$

式中, D_1 为归算到参考椭球面上的测距长度; h_m

收稿日期:2014-09-17

项目来源:湖北省博士后创新岗位基金资助项目。

第一作者:张辛,工程师,博士后,主要从事大地测量与测量工程研究。E-mail:zsimba@163.com

为测区大地水准面高出参考椭球面的高差。相应的参考椭球面上的高程归化变形表示为：

$$\Delta S_1 = \frac{D_1 - D}{D} = -\frac{H_m + h_m}{R_A + H_m + h_m} \quad (4)$$

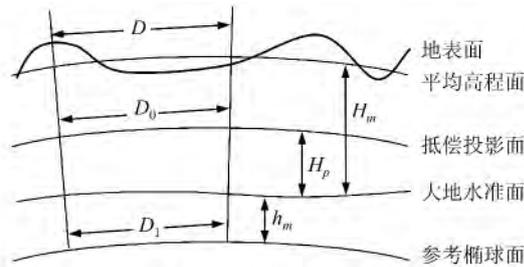


图1 高程归化示意图

Fig. 1 Diagram of Elevation Correction

1.2 高斯改化变形

同样地,在水利水电工程测量规范中,把参考椭球面上的测距边长度归算到高斯平面上的长度为:

$$D_2 = D_1 \times \left(1 + \frac{y_m^2}{2R_m^2} + \frac{(\Delta y)^2}{24R_m^2}\right) \quad (5)$$

式中, D_2 为归算到高斯平面的长度; Δy 为测距边两端点横坐标之差; y_m 为测距边两端点横坐标平均值; R_m 为参考椭球上测距边中点的平均曲率半径。

由式(5)可知,将参考椭球面上的测距边归算到高斯投影面上,投影边长的相对投影变形,即高斯改化变形为:

$$\Delta S_2 = \frac{D_2 - D_1}{D_1} = \frac{y_m^2}{2R_m^2} + \frac{(\Delta y)^2}{24R_m^2} \quad (6)$$

1.3 综合变形

从上述分析可知,把水平距离归算到高斯平面上,存在高程归化值与高斯改化值两种变形量。综合式(3)与式(6),可得到综合变形为:

$$\begin{aligned} \frac{D_2 - D}{D} &= \left(1 - \frac{H_m + h_m}{R_A + H_m + h_m}\right) \cdot \left(1 + \frac{y_m^2}{2R_m^2} + \frac{(\Delta y)^2}{24R_m^2}\right) - 1 \\ &= \left(\frac{- (H_m + h_m)}{R_A + H_m + h_m}\right) + \left(\frac{y_m^2}{2R_m^2} + \frac{(\Delta y)^2}{24R_m^2}\right) \\ &\quad + \left(\frac{- (H_m + h_m)}{R_A + H_m + h_m}\right) \cdot \left(\frac{y_m^2}{2R_m^2} + \frac{(\Delta y)^2}{24R_m^2}\right) \\ &= \Delta S_1 + \Delta S_2 + \Delta S_1 \cdot \Delta S_2 \quad (7) \end{aligned}$$

当存在特定高程面设置时,水平距离则应先归算到特定高程面上,再归算到高斯平面。此时,综合式(2)与式(6)得到新的综合变形为:

$$\Delta S = \left(1 + \frac{H_p - H_m}{R_A}\right) \cdot \left(1 + \frac{y_m^2}{2R_m^2} + \frac{(\Delta y)^2}{24R_m^2}\right) - 1$$

$$\begin{aligned} &= \left(\frac{H_p - H_m}{R_A}\right) + \left(\frac{y_m^2}{2R_m^2} + \frac{(\Delta y)^2}{24R_m^2}\right) + \\ &\quad \left(\frac{H_p - H_m}{R_A}\right) \cdot \left(\frac{y_m^2}{2R_m^2} + \frac{(\Delta y)^2}{24R_m^2}\right) = \quad (8) \\ &\Delta S_0 + \Delta S_2 + \Delta S_0 \cdot \Delta S_2 \end{aligned}$$

2 测区分带设置与变形分析

2003年开始的云南滇中引水工程规划工作,根据已有资料的情况,采用了1954年北京坐标系作为工程的平面坐标系,并使用1985国家高程基准。在近期的勘测工作中,针对前期选定的平面与高程系统,获取了工程总干渠线路的控制测量成果。

2.1 国家统一3°带坐标变形分析

首先对滇中引水控制测量的1954年北京坐标系统的3°带坐标成果进行分析。如图2所示,引水的干渠线路从东经99°到103°,跨越了两个国家3°投影带。两个分带区域中,边缘点至中央子午线的横坐标距离最大达152 km,由式(6)可知,其在高斯平面的改化变形可达28.5 cm/km。

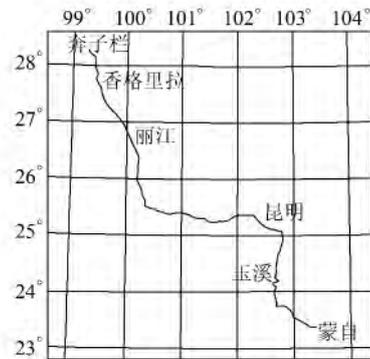


图2 滇中引水干渠线路示意图

Fig. 2 Trunk Line of Water Diversion Project in Central Yunnan

另一方面,工程区域地处高原,渠首奔子栏海拔达到2 064 m,渠尾蒙自海拔为1 401 m。由式(4)可得,其归化到参考椭球体上的变形值可达-33~-23 cm/km。由式(7)计算可得,两项变形值在少许渠段互为抵消,但在大部分的渠段中综合变形值大于5 cm/km,不符合规范的要求。此外,对总干渠线路分别计算两项变形值并综合后,渠道总长能缩短约155 m,这对工程设计有较严重的影响。

综上所述,滇中引水工程干线使用国家3°带坐标系时,高程归化与高斯改化变形均很大,使测距边综合变形远超规范要求。因此,建立独立坐标系时需要从分带方式与高程面设置两方面综合

考虑。

2.2 国家统一 1°带坐标变形分析

为了减小高斯改化变形量,工程方案设计中首先提出了采用 1954 年北京坐标系的 1°带分带方式。该方式曾在南水北调中线干渠工程坐标系统的建设中予以采用,并取得了良好的变形控制效果^[4]。

滇中引水工程使用 1°带的分带方式时,测区从东经 99°到 103°被分成了 5 个区域。各区域的边缘点距离中央子午线的横坐标距离约为 50 km,则由式(6)可得,高斯改化变形的最大值约为 3.2 cm/km,相应变形量能得到有效的控制。但由 § 2.1 节的分析可知,测距边投影到参考椭球面的高程归化变形值能达到 -30 m/km,比新的高斯改化值大一个数量级,综合变形依然很大。因此还需要通过抵偿投影面的设置来控制高程归化变形。

3 测区抵偿投影面的设置分析

3.1 抵偿投影面的选择方法

设置抵偿投影面的目的是为了最大限度地控制变形量,使测区长度综合变形的最大值最小。已有的抵偿投影面的设置方法^[7-8]均是基于测区的高程恒定无变化,取为 H_m 的情况。而滇中引水工程干线高程变化较大,并且高程基本随测距边与中央子午线的距离 y 而线性变化,因此,可将 H_m 替换为 $H(y)$:

$$H(y) = H_0 + ky \tag{9}$$

式中, H_0 是测区在中央子午线处的高程; k 为测区内的高程随 y 值的变化率。

此时,再对 § 1.3 节综合变形的式(8)进行分析。式(8)中最后的分项 $\Delta S_0 \cdot \Delta S_2$ 远小于 ΔS_0 与 ΔS_2 ,因而可以略去。而在局部区域 Δy 趋于零,因此, ΔS_2 中的分项 $(\Delta y)^2 / 24R_m^2$ 也可略去。此外,一般取 $R_A = R_m = R = 6\,371$ km,则综合式(8)、(9)可得:

$$\Delta S(y) = \frac{H_p - (H_0 + ky)}{R} + \frac{y^2}{2R^2} = \frac{(y - kR)^2}{2R^2} + \frac{H_p - H_0}{R} - \frac{k^2}{2} \tag{10}$$

随后的问题是求取合适的抵偿高程 H_p ,使 $y \in (y_{\min}, y_{\max})$ 时有 $\max\{|\Delta S(y)|\}$ 最小。具体可分为如下两种情况分析。

3.1.1 $kR \notin (y_{\min}, y_{\max})$

此时,函数 $\Delta S(y)$ 的最值一定在 y_{\min} 与 y_{\max}

处获取,因此,要使 $\max\{|\Delta S(y)|\}$ 最小,有:

$$\Delta S(y_{\min}) + \Delta S(y_{\max}) = 0 \tag{11}$$

结合式(10)、(11)得:

$$H_p = H_0 + \frac{k \cdot (y_{\min} + y_{\max})}{2} - \frac{y_{\max}^2 + y_{\min}^2}{4R} \tag{12}$$

又由式(9)得 H_0 与 y_{\min} 、 y_{\max} 处高程 H_1 、 H_2 有如下关系:

$$\begin{aligned} H_0 &= H_1 - ky_{\min} = \\ &H_2 - ky_{\max} \end{aligned} \tag{13}$$

由式(12)、(13)得到抵偿投影面的计算公式为:

$$H_p = \frac{H_1 + H_2}{2} - \frac{y_{\min}^2 + y_{\max}^2}{4R} \tag{14}$$

3.1.2 $kR \in (y_{\min}, y_{\max})$

这种情况下,函数 $\Delta S(y)$ 的最值分析除考虑 y_{\min} 与 y_{\max} 外,还需考虑 $y = kR$ 处。可再分作如下两种情况分析。

1) $kR < (y_{\min} + y_{\max})/2$

此时,函数 $\Delta S(y)$ 在 y_{\max} 处最大,在 $y = kR$ 处最小,要使 $\max\{|\Delta S(y)|\}$ 最小,有:

$$\Delta S(y_{\max}) + \Delta S(y_{kR}) = 0 \tag{15}$$

结合式(10)、(15)得抵偿投影面为:

$$H_p = H_0 + \frac{Rk^2}{2} - \frac{(y_{\max} - kR)^2}{4R} \tag{16}$$

2) $kR > (y_{\min} + y_{\max})/2$

此时,函数 $\Delta S(y)$ 在 y_{\min} 处最大,在 $y = kR$ 处最小,要使 $\max\{|\Delta S(y)|\}$ 最小,有:

$$\Delta S(y_{\min}) + \Delta S(y_{kR}) = 0 \tag{17}$$

结合式(10)、(17)得抵偿投影面为:

$$H_p = H_0 + \frac{Rk^2}{2} - \frac{(y_{\min} - kR)^2}{4R} \tag{18}$$

3.2 测区抵偿投影面的选定

结合 § 2.2 节的分析,滇中引水工程应从东经 99°到 103°的 5 个 1°带区域分别选取最佳抵偿投影面。

在 99°中央子午线区域,测区的点与中央子午线距离 $y_{\min} = 25\,716$ m, $y_{\max} = 49\,353$ m,相对应的高程从 2 064 m 降至 2 031 m。参照式(9)将高程变化拟合合成线性函数,其中的斜率为 $k = \Delta H / \Delta y = -1.394 \times 10^{-3}$,得 $kR = -8\,894$ m,在区间 $[25\,716, 49\,381]$ 外,因此属于 § 3.1.1 节分析的情况,可由式(14)求得最佳补偿高程面 $H_p = 1\,926$ m。

在 100°中央子午线区域,测区的 $y_{\min} = -49\,353$ m, $y_{\max} = 50\,283$ m,高程从 2 031 m 降至 1 952 m。可求得斜率为 $k = \Delta H / \Delta y = -7.93 \times 10^{-4}$,得 $kR = -5\,051$ m,在区间 $[-49\,326,$

50 312]内,并且 $kR < (y_{\min} + y_{\max})/2$,因此属于 § 3.1.2 节分析的第一种情况,可由式(16)求得补偿高程面 $H_P = 1\ 874$ m。

按照上述方法分别在 5 个中央子午线区域求取最佳补偿高程面,结果如表 1 所示。表 1 中也列举了抵偿投影面设置后的最大综合变形位置,以及该变形量 ΔS 的高程归化变形分量 ΔS_0 与高斯改化变形分量 ΔS_2 的数值。

表 1 各中央子午线区域最佳抵偿投影面与最大变形量

Tab. 1 Optimal Compensation Projection Planes and the Maximum Deformation of the Central Meridian Regionals

中央子午线/(°)	最佳抵偿投影面/m	最大变形情况/(cm·km ⁻¹)			
		位置	ΔS_0	ΔS_2	ΔS
99	1 926	y_{\max}	-1.647	3.005	1.358
100	1 874	y_{\max}	-1.229	3.120	1.891
101	1 832	$y = kR$	-1.685	0.004	-1.681
102	1 805	$y = kR$	-1.683	0.004	-1.679
103	1 468	y_{\max}	1.040	3.029	4.069

由表 1 可知,通过设置抵偿投影面,前 4 个区域的综合变形都得到了有效控制。但在 103°带区域,由于高程在局部位置变化较大,综合变形最大值可达 4.067cm/km,有进一步优化的可能性。由分析得知,以 103°中央子午线为界,将该区域分为东、西两部分,分别求取抵偿投影面的控制效果较好,如表 2 所示。

表 2 103°中央子午线区域重设抵偿投影面

Tab. 2 Reset Compensation Projection Planes of 103° Central Meridian Regional

区域	最佳抵偿投影面/m	最大变形情况/(cm·km ⁻¹)			
		位置	ΔS_0	ΔS_2	ΔS
西部	1 569	y_{\min}	-5.176	3.136	-2.040
东部	1 325	y_{\max}	-1.209	3.022	1.813

上述求取的是理论上的测区最佳抵偿投影面,但在实际工程中,抵偿面设置过多会增加工程干渠坐标计算与使用的难度^[9-11]。因此,在综合变形可接受的范围内,本文调整了各测区的抵偿投影面,调整情况及调整后的最大变形量如表 3 所示。

4 结 语

1) 滇中引水工程测区线路较长,跨越了两个国家 3°投影带。为了合理地控制工程的高斯投影变形,建议采用 1°带的分带方式。

表 3 各区域调整后抵偿投影面与最大变形量

Tab. 3 Adjustment Compensation Projection Planes of the Central Meridian Regionals

中央子午线	最佳抵偿投影面/m	调整后抵偿投影面/m	调整后最大变形量/(cm·km ⁻¹)
99°	1 926	1 900	-1.760
100°	1 874	1 900	2.301
101°	1 832	1 800	-2.186
102°	1 805	1 800	-1.758
103°西部	1 569	1 600	2.500
103°东部	1 325	1 300	-2.194

2) 为了控制高程归化变形,滇中引水工程必须结合使用多个抵偿投影面。结合工程实际推导的抵偿投影面求取方法表明,在 99°、100°、101°与 102°中央子午线区域各设置一个抵偿投影面,在 103°区域设置两个抵偿投影面,能将综合变形基本控制在 2 cm/km 以内。

3) 综合考虑工程数据测算的便利性,建议采用的抵偿投影面设置方式为:99°至 100°中央子午线区域使用 1 900 m 的抵偿投影面;101°至 102°区域使用 1 800 m 的抵偿投影面;此外,103°中央子午线以西使用 1 600 m 的抵偿投影面,以东使用 1 300 m 的抵偿投影面。上述设置能将工程干线的综合变形最大值控制在 2.5 cm/km 以内,较好地满足了规范要求。

参 考 文 献

- [1] Featherstone W E, Sproule D M. Fitting AUS-Geoid98 to the Australian Height Datum Using GPS leveling and Least Squares Collocation; Application of a Cross-Validation Technique[J]. *Surveying Review*, 2006, 38(301):573-582
- [2] Shi Yimin. Modern Geodetic and Control Survey [M]. Beijing: Publishing House of Surveying and Mapping, 2008(施一民. 现代大地控制测量[M]. 北京:测绘出版社, 2008)
- [3] Wei Ziqing. Re-approaching the Geodetic Coordinate System[J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2011, 36(8): 883-886 (魏子卿. 大地坐标系新探[J]. 武汉大学学报·信息科学版, 2011, 36(8):883-886)
- [4] Yang Aiming, Yan Jianguo, Yang Chenghong, et al. Study on Construction Surveying Control Network of South-to-North Water Diversion Middle Route Project[J]. *Yangtze River*, 2010, 41(19): 30-33 (杨爱明, 严建国, 杨成宏, 等. 南水北调中线工程施工测量控制网系统研究[J]. 人民长江, 2010, 41(19):30-33)
- [5] Li Shi'an, Liu Jingnan, Shi Chuang. Study of the Ellipsoid Transformation on the Establishment of

- Local Independence Coordinate System Using GPS Technique[J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2005,30(10):888-891(李世安,刘经南,施闯. 应用 GPS 建立区域独立坐标系中椭球变换的研究[J]. 武汉大学学报·信息科学版,2005,30(10):888-891)
- [6] Wang Lei, Guo Jiming, Shen Lili, et al. Ellipsoid Expansion Method Considering Ellipsoid Parallel Misalignment and Its Application to Projection Plane Transformation[J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2013, 38(6):725-733(王磊,郭际明,申丽丽,等. 顾及椭球面不平行的椭球膨胀法在高程投影面变换中的应用[J]. 武汉大学学报·信息科学版,2013,38(6):725-733)
- [7] Fan Yizhong, Wang Jigang, Zhao Lihua. On the Optimal Selection of the Compensating Projecting Plane[J]. *Bulletin of Surveying*, 2000,(2):20-21(范一中,王继刚,赵丽华. 抵偿投影面的最佳选取问题[J]. 测绘通报,2000,(2):20-21)
- [8] Wang Huainian. Theoretical Derivation of Optimal Compensation Projecting Plane [J]. *Bulletin of Surveying*, 2004(10):18-19(王怀念. 最佳抵偿投影面的理论推导[J]. 测绘通报,2004(10):18-19)
- [9] Sanchez L, Brunini C. Achievements and Challenges of SIRGAS, Geodetic Reference Frames [C]. International Association of Geodesy Symposia, Munich, Germany, 2006
- [10] Xu Shaoquan, Cheng Wenming, Huang Xuebin, et al. The Investigation of the Landslides Monitoring in the Three Gorges Reservoir Region by Applying GPS [J]. *Journal of Hydraulic Engineering*, 2003,(1):114-118(徐绍铨,程温鸣,黄学斌,等. GPS 用于三峡库区滑坡监测的研究[J]. 水利学报,2003,(1):114-118)
- [11] Yang Yuanxi. Chinese Geodetic Coordinate System 2000 [J]. *Chinese Science Bulletin*, 2009, 54:2 714-2 721

Key Technology on Establishment of an Independent Coordinate System for Water Diversion Project in Central Yunnan

ZHANG Xin¹ YANG Aiming¹ XU Qifeng² JIANG Benhai¹

¹ Changjiang Institute of Survey, Planning, design and Research, Wuhan 430010, China

² Information Engineering University, Zhengzhou 450001, China

Abstract: A water diversion project in Central Yunnan exhibited several typical characteristics of the overall survey region, such as the extraordinarily long span, the high average altitude, and large elevation changes. Therefore, difficult to build independent coordinate system for this project. Based on the theory of projection distortion, we propose a key technology solutions composed of two parts. First, using the 1° projection zone to replace the regular 3° projection zone, Gauss projection distortion was effectively controlled. Second, a method for selecting a compensation projection plane was deducted to satisfy the needs of this water diversion project. An optimized solution for this project was found using the proposed independent coordinate system and efficiently controlled, the maximum comprehensive deformation for this water diversion project in Central Yunnan.

Key words: water diversion project in Central Yunnan; elevation correction; Gauss correction; 1° projection zone; compensation projecting plane

First author: ZHANG Xin, engineer, postdoctoral, specializes in geodesy and surveying engineering research. E-mail: zsimba@163.com

Foundation support: Hubei Postdoctoral Innovation Foundation.