

最小 GDOP 组合 Walker 星座构型

薛树强^{1,2} 杨元喜³

1 长安大学地测学院,陕西 西安,710054

2 中国测绘科学研究院,北京,100830

3 地理空间信息工程国家重点实验室,陕西 西安,710054

摘要:几何精度衰减因子(GDOP)是衡量定位构型优劣的重要指标,探讨最小 GDOP 定位构型的几何结构在单 GNSS 星座设计和多系统组合优化方面具有现实意义。在 GNSS 普遍采用的 Walker 构型的基础上,导出了最小 GDOP 组合 Walker 构型所应满足的条件方程。讨论了单一和组合 Walker 构型的 GDOP 地表覆盖性质。最后,通过仿真分析验证了主要结论。

关键词:GNSS 星座;定位构型;Walker 构型;测距方程;最优构型

中图法分类号:P228

文献标志码:A

控制网的一类设计是确定控制网的最佳定位图形^[1]。定位图形设计与测量平差具有同样的地位和重要性^[2]。控制网常用的准则有 A-准则、N-准则、S-准则和 D-准则^[1]。在导航定位中,位置及钟差参数的精度与几何精度衰减因子(GDOP)有关^[3-5]。GDOP 的概念建立在 A-准则的基础上,即点位方差-协方差矩阵的对角线元素之和作为网的精度指标^[6]。文献[7-12]讨论了测距单点定位构型的最小 GDOP 取值,文献[6]探讨了 4 颗卫星情形下具有最小 GDOP 的测距单点定位构型。顾及精度和可靠性的控制网优化设计思想在现实应用中具有重要参考价值^[10, 11, 13]。文献[14]给出了具有两个自由度的最小 PDOP 平面交会定位图形的完整解。

图论为定位图形的表示和分析提供了数学模型^[15-19]。文献[18]基于图论建立了连续定位构型,并使用 D-准则建立了动态控制点的最佳运动曲线,即通过时间积分解决了定位构型分析。文献[15]借助傅立叶中的正交三角函数系统研究了最小 GDOP 单点定位构型,导出了最小 GDOP 定位构型的图形条件,并以此给出了一些具有最小 GDOP 测距单点定位构型解。文献[16]基于圆锥构型构造了一种嵌套圆锥构型,得到了一族具有

丰富几何结构的最小 GDOP 三维定位构型,并由此导出了数学中的 5 种正多面体构型,证明了数学中的 5 种正多面体均具有最小的 GDOP。

组合 GNSS 星座可为地球科学研究提供空间分辨率和时间分辨率更高^[5]。特别的,正在兴起的 BDS(北斗导航卫星定位系统)采用混合星座^[3],在传统 Walker 构型的基础上引入 GEO 卫星轨道和 IGSO 卫星轨道。因此,讨论最小 GDOP 组合 Walker 构型,在单 GNSS 星座设计、多 GNSS 星座组合优化等方面具有重大现实意义。本文借助于图论表示法,将 GNSS 普遍采用的 Walker 构型扩展为组合 Walker 构型,并在文献[15, 16]的基础上,导出了最小 GDOP 组合 Walker 构型所应满足的条件方程。讨论了单一和组合 Walker 构型的 GDOP 地表覆盖性质。

1 最小 GDOP 三维单点定位构型

“定位构型”是指定位系统的所有可能的状态,是待定点与控制点构成的定位图形^[15]。在 m ($m=2$ 或 3) 维空间中,由未知点 x 和已知点 x_i ($i=1, 2, \dots, n$) 构成的定位图形可以使用图论模型化为^[15, 17]:

收稿日期:2014-10-11

项目资助:国家自然科学基金(41020144004, 41104018, 41474011);国家科技支撑计划(2012BAB16B01);国家 863 计划(2009AA121405, 2013AA122501);北斗全球连续监测评估(GFZX0301040309);福建省海岛与海岸带管理技术研究实验室开放研究基金(201403)。

第一作者:薛树强,博士生,研究方向为误差理论与测量平差。xuesq@casm.ac.cn

$$G_{n,m} = (x, \Theta) \quad (1)$$

式中, $\Theta = \{x_i | i=1, 2, \dots, n\}$, 为控制点构型。由最小 GDOP 测距单点定位构型全体构成的集合

$$O_{n,m}(x) :=$$

$$\{G_{n,m}(x) | G_{n,m}(x) = \operatorname{argminGDOP}(G_{n,m}(x))\}$$

称为 GDOP 最小测距单点定位构型集。其中, n 表示控制点数目; m 表示定位图形所在空间的维数; GDOP 为定位构型 $G_{n,m}(x)$ 的 GDOP, argmin 为 GDOP 极值目标函数。最小 GDOP 测距单点定位构型具有以下性质^[15]:

(1) 叠加(加法)不变性。对任意自然数 q_1 和 q_2 , 若 $G_{q_1,m}(x) \in O_{q_1,m}(x)$, $G_{q_2,m}(x) \in O_{q_1,m}(x)$, 则叠加构型 $G_{q_1,m}(x) + G_{q_2,m}(x) \in O_{q_1+q_2,m}(x)$ 。

(2) 旋转不变性(最小 DOP 定位构型的旋转不变性反映了定位构型的 DOP 与坐标系统的选取无关)。若 $G_{n,m}(x) \in O_{n,m}(x)$, 则 $G_{n,m}(x)$ 的 n 控制点围绕待定点 x 旋转一定角度(由旋转矩阵 R 确定)后的定位构型 $G_{n,m}^R(x) \in O_{n,m}(x)$ 。

文献[15]构造了 4 种三维最小 GDOP 测距单点定位构型。笛卡尔构型和 Walker 构型的最小 GDOP 图形条件可为 GNSS 星座设计提供参考。文献[16]从最小 GDOP 嵌套圆锥构型中导出了数学中仅有的 5 种正多面体构型: 正四面体、立方体、正八面体、正二十面体和正十二面体, 证明了这 5 种正多面体构型满足 GDOP 极值条件。因卫星的运动轨迹不是自由曲线, 而要遵循牛顿运动定律, 圆锥构型并不能很好地适用于卫星星座设计。笛卡尔构型和 Walker 构型可满足单卫星星座设计需求, 但这仍不能满足组合 Walker 星座设计和混合星座设计, 例如, 在北斗 MEO 卫星星座采用 Walker 构型, 同时还混入了地球同步卫星轨道和倾斜地球同步轨道。

2 组合 Walker 构型

如图 1 所示, 在 T 个与 $x-o-y$ 坐标平面夹角均为 α 的平面内, 存在 n 个最小 GDOP 二维测距单点定位构型 $G_{n,2}^1(x) \in O_{n,2}(x)$, $G_{n,2}^2(x) \in O_{n,2}(x)$, \dots , $G_{n,2}^T(x) \in O_{n,2}(x)$, 若这 T 个平面中的任意相邻平面间夹角均等于 $\gamma = 2\pi/T$ (等分圆周), 即有^[20]:

$$\Omega_i = \Omega_0 + 2(i-1)\pi/n, i = 1, 2, \dots, n \quad (2)$$

则这 n 个二维定位构型构成的三维定位构型记为 $W_{nT,3}^{a,T,F}(x)$, 其中符号 W 来自于单词“Walker”的首字母。为改善星座的地表覆盖, 可通过设置不同轨道平面内卫星的初始相位。GNSS 星座则常通过引入调相因子 F 改善地表覆盖, 可将该

Walker 构型记为 $W_{nT,3}^{a,T,F}(x)$ 。文献[15]证明, $W_{nT,3}^{\arctan\sqrt{2},T,F}(x) \in O_{nT,3}(x)$ 。GPS 卫星星座轨道倾角恰为 $55^\circ \approx \arctan\sqrt{2}$ 。

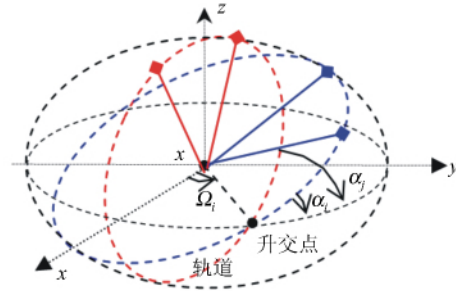


图 1 组合 Walker 构型

Fig. 1 Combined Walker Configuration

若将 S 个 Walker 构型 $W_{n_1T_1,3}^{a_1,T_1,F_1}(x)$, $W_{n_2T_2,3}^{a_2,T_2,F_2}(x)$, \dots , $W_{n_ST_S,3}^{a_S,T_S,F_S}(x)$ 叠加构成的定位构型称为组合 Walker 构型, 则该构型可记为:

$$\sum_{j=1}^S W_{n_jT_j,3}^{a_j,T_j,F_j}(x) := (x, \bigcup_{k=1}^N \{x_i^k | i = 1, 2, \dots, n_jT_j\}) \quad (3)$$

式中, \bigcup 表示求并集合。

3 组合 Walker 构型的 GDOP 极值

下面将推导组合 Walker 构型在地心处 GDOP 极值的一般条件(由于地球半径相对于卫星轨道较小, 则当地心 GDOP 达到极值时, 地表 GDOP 分布将相对均匀^[17])。对于组合定位构型

$$\sum_{j=1}^S W_{n_jT_j,3}^{a_j,T_j,F_j}(x), \text{ 其设计矩阵可表示为}^{[15]}:$$

$$J = [J_1^T \ J_2^T \ \dots \ J_S^T]^T \quad (4)$$

式中, J_j 是第 j 个单 Walker 定位构型的设计矩阵。若设

$$N_j = J_j^T J_j \quad (5)$$

则由文献[15]导出的公式(47), 可得:

$$N_j = \operatorname{diag}\left(\frac{T_j n_j}{4} + \frac{T_j n_j}{4} \cos^2 \alpha_j, \frac{T_j n_j}{4} + \frac{T_j n_j}{2} \cos^2 \alpha_j, \frac{T_j n_j}{2} \sin^2 \alpha_j, T_j n_j\right) \quad (6)$$

结合式(4), 由式(6)可得:

$$J^T J = \sum_{i=1}^S N_i = \operatorname{diag}\left(\sum_{i=1}^S \left[\frac{T_i n_i}{4} + \frac{T_i n_i}{4} \cos^2 \alpha_i\right], \sum_{i=1}^S \left[\frac{T_i n_i}{4} + \frac{T_i n_i}{2} \cos^2 \alpha_i\right], \sum_{i=1}^S \frac{T_i n_i}{2} \sin^2 \alpha_i, \sum_{i=1}^S T_i n_i\right) \quad (7)$$

记 $M_j = T_j n_j$ 为第 j 个单 Walker 构型的总数, 则由文献[15]导出的 GDOP 极值条件, 可得:

$$\sum_{i=1}^S \left[\frac{M_i}{4} + \frac{M_i}{4} \cos^2 \alpha_i \right] = \sum_{i=1}^S \frac{M_i}{2} \sin^2 \alpha_i \quad (8)$$

化简式(8)可得:

$$\sum_{i=1}^S M_i \cos^2 \alpha_i = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^S M_i \quad (9)$$

显然,条件方程(9)为欠定方程,唯一确定最小 GDOP 组合构型的几何条件需要给出一定的条件。此外,当调相因子 $F=0$ 时, Walker 构型可退化为组合圆锥构型。

4 最小 GDOP 组合 Walker 构型

对比文献[16]中的条件方程(19)可以发现,最小 GDOP 嵌套圆锥构型张角条件与最小 GDOP 组合 Walker 构型倾角条件完全相同。为便于记忆,给出了 GDOP 最小正多面体支撑 Walker 构型。

4.1 正多面体支撑 Walker 构型

(1) 正四面体支撑 Walker 构型

令 $S=2, M_2=3M_1, \cos^2 \alpha_1=1$ (极轨道),则由式(9)可得:当 $\cos^2 \alpha_2=1/9$ ($\alpha_2 \approx \pm 19.47^\circ$) 时, $W_{n_1 T_1, 3}^{90^\circ, T_1, F}(x) + W_{3n_1 T_1, 3}^{\arccos \pm 1/3, 3T_1, F}(x) \in O_{4n_1 T_1, 3}(x)$ 。

(2) 正方体支撑 Walker 构型

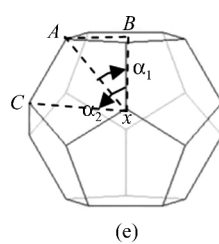
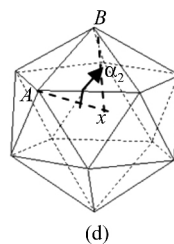
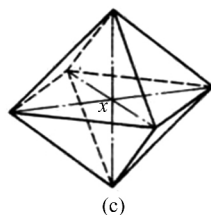
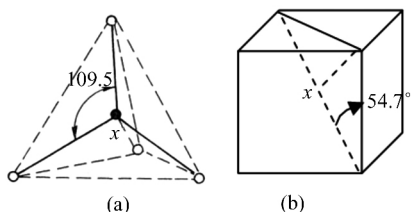


图2 正多面体构型

Fig. 2 Regular Polyhedrons Configuration

4.2 含有极轨的组合 Walker 构型

令 $S=2, \alpha_1=90^\circ$,则由条件式(9)可得:

$$\cos^2 \alpha_2 = \frac{1}{3} + \frac{M_1}{3M_2} \quad (10)$$

当且仅当

$$0 \leq \frac{M_1}{M_2} \leq 2 \quad (11)$$

时,式(10)中的 α_2 存在实数解。例如,正四面体支撑 Walker 构型和正八面体支撑 Walker 构型均含一个极轨 Walker 构型(轨道倾角为 90° 的 Walker 构型),且显然满足条件(11)。

当 $S=2$ 时,存在无穷种含有极轨 Walker 构型的最小 GDOP 组合 Walker 构型,且

$$\cos^2 \alpha_2 > \frac{1}{3} \quad (12)$$

令 $S=1$,则由式(9)可得,当 $\cos^2 \alpha=1/3$ ($\alpha \approx \pm 54.74^\circ$) 时,可导出正方体支撑 Walker 构型,该构型显然与单卫星构型 $W_{nT, 3}^{\arccos \pm \sqrt{1/3}, T, F}(x) \in O_{nT, 3}(x)$ 具有相同的结构。

(3) 正八面体支撑 Walker 构型

令 $S=2, M_2=2M_1$,令 $\alpha_1=0$ (赤道平面轨道),则由式(9)可得,当 $\alpha_2=90^\circ$ 时,则正八面体支撑 Walker 构型 $W_{n_1 T_1, 3}^{0^\circ, T_1, F}(x) + W_{2n_1 T_1, 3}^{90^\circ, 2T_1, F}(x) \in O_{3n_1 T_1, 3}(x)$ 。

(4) 正二十面体支撑 Walker 构型

令 $S=2, M_2=5M_1$,令 $\alpha_1=0$ (赤道平面轨道),则由式(9)可得,当 $\cos^2 \alpha_2=1/5$ ($\alpha_2 \approx \pm 63.44^\circ$) 时,则正二十面体支撑 Walker 构型 $W_{n_1 T_1, 3}^{0^\circ, T_1, F}(x) + W_{5n_1 T_1, 3}^{\arccos \pm \sqrt{1/5}, 5T_1, F}(x) \in O_{6n_1 T_1, 3}(x)$ 。

(5) 正十二面体支撑 Walker 构型

令 $S=2, M_1=M_2$,则由式(9)可得,当 $\frac{2}{3} = \cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \alpha_2$ 时,总存在 $W_{n_1 T_1, 3}^{\alpha_1, T_1, F}(x) + W_{n_1 T_1, 3}^{\alpha_2, T_1, F}(x) \in O_{2n_1 T_1, 3}(x)$ 。类似文献[16],由 $\cos^2 \alpha_1 = \frac{50+22\sqrt{5}}{90+30\sqrt{5}}, \cos^2 \alpha_2 = \frac{1}{15} \left(\frac{5-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}} \right)$ 可得正十二面体支撑 Walker 构型。

可见,引入一个极轨 Walker 构型后,另外一个 Walker 构型 $W_{n_2 T_2, 3}^{\alpha_2, T_2, F}(x)$ 的轨道倾角应在最小 GDOP 单 Walker 构型 $W_{n_2 T_2, 3}^{\arccos \pm \sqrt{1/3}, T_2, F}(x) \in O_{n_2 T_2, 3}(x)$ 的基础上对卫星轨道倾角进行适当调整(调减卫星轨道倾角),以确保组合后的 Walker 构型仍满足 GDOP 极值条件。正八面体支撑 Walker 构型给出了这种调整的极限情形。

类似地,当 $S>2$ 时,还可以导出许多含有极轨 Walker 构型的最小 GDOP 组合 Walker 构型。

4.3 含有赤道平面轨道的组合 Walker 构型

令 $S=2, \alpha_1=0^\circ$,则由条件式(9)可得:

$$\cos^2 \alpha_2 = \frac{1}{3} - \frac{2M_1}{3M_2} \quad (13)$$

当且仅当

$$0 \leq \frac{M_1}{M_2} \leq \frac{1}{2} \quad (14)$$

时,式(13)中的 α_2 存在实数解。例如,正八面体支撑 Walker 构型和正二十面体支撑 Walker 构型均含一个赤道平面 Walker 定位构型(轨道倾角为 0 时的 Walker 构型),且显然满足条件(14)。

由式(13)可得:

$$\cos^2 \alpha_2 < \frac{1}{3} \quad (15)$$

可见,在赤道平面引入零倾角的 Walker 构型后,另一个 Walker 构型 $W_{n_2 T_2, 3}^{a_2, T_2, F}(x)$ 的轨道倾角应在最小 GDOP 单 Walker 构型 $W_{n_2 T_2, 3}^{\arccos \pm \sqrt{1/3}, T_2, F}(x) \in O_{n_2 T_2, 3}(x)$ 的基础上对轨道倾角进行适当调整(调增轨道倾角),以确保组合后的 Walker 构型仍满足 GDOP 极值条件。正八面体支撑 Walker 构型给出了这种调整的极限情形。

类似地,当 $S > 2$ 时,还可导出许多含有赤道平面 Walker 的最小 GDOP 组合 Walker 构型。

5 算 例

通过仿真分析,应用条件方程(9)讨论 GNSS 星座构型设计与星座构型二次设计。仿真基于以下假设:① Walker 构型采用 MEO 卫星,轨道高度采用 20 000 km,第一个轨道面的升交点角距设为 0° ,即式(2)中的 $\Omega_0 = 0$;② 设 $R_{n,3}^{\beta, \omega_0, \Omega_0}$ 表示由 n 颗卫星在轨道平面内均匀分布构成的倾角为 β 的单卫星轨道(ω_0, Ω_0 为第一颗卫星的初始相位和轨道的升交点角距);③ GEO 卫星高度设为 36 000 km;④ 地球半径设为 6 378.1 km;⑤ 将地表分为 5 120 个三角形,计算各三角形中心点处的 GDOP(历元 $t = 0$ 时);⑥ 设高度角大于 0 时,卫星可见。

在上述假设下,地表的平均 GDOP 定义为:

$$E(\text{GDOP}_{\text{surf}}) = \sum_{i=1}^{5120} \text{GDOP}_i / 5120 \quad (16)$$

式中, GDOP_i 是第 i 个三角形中心点处的 GDOP。地表 GDOP 的方差定义为:

$$D(\text{GDOP}_{\text{surf}}) = \sum_{i=1}^{5120} (\text{GDOP}_i - E(\text{GDOP}_{\text{surf}}))^2 / (5119) \quad (17)$$

地表最大 GDOP 取值定义为:

$$\max(\text{GDOP}_{\text{surf}}) = \max_{i=1,2,\dots,5120} (\text{GDOP}_i) \quad (18)$$

5.1 单 Walker 星座构型的地表 GDOP 对比

表 1 和图 3 分别给出了 $W_{24,3}^{64.8^\circ, 3, 0}$ 、 $W_{24,3}^{64.8^\circ, 3, 1}$ 、 $W_{24,3}^{55^\circ, 3, 0}$ 、 $W_{24,3}^{55^\circ, 3, 1}$ 、 $W_{24,3}^{45.84^\circ, 3, 0}$ 和 $W_{24,3}^{45.84^\circ, 3, 1}$ 等 6 种

Walker 星座构型所对应的地表 GDOP 分布情况。从表 1 给出的统计结果中可以发现,调相因子对改善地表 GDOP 均值和方差均有帮助,但会增大地表最大 GDOP 的取值。当调相因子为 0 且不考虑卫星不可见时,构型 $W_{24,3}^{55^\circ, 3, 0}$ 在地心的 GDOP 较为接近其理论最小值,且地表 GDOP 的最大值最小,但其 GDOP 的最小值和方差均相比较大。当调相因子为 1 时,构型 $W_{24,3}^{55^\circ, 3, 1}$ 在地心的 GDOP、地表 GDOP 均值、地表 GDOP 方差、地表最大 GDOP 均相对较小。对于单卫星系统星座而言,北斗的 MEO 卫星星座采用 $W_{24,3}^{55^\circ, 3, 1}$, 从 GDOP 角度北斗星座优于 GLONASS。

表 1 地表 GDOP 分布(一)

Tab. 1 Distribution of Surface GDOP of the Earth (one)

星座构型	$E(\text{GDOP}_{\text{surf}})$	$D(\text{GDOP}_{\text{surf}})$	$\max(\text{GDOP}_{\text{surf}})$
$W_{24,3}^{64.8^\circ, 3, 0}$	1.824 648	0.156 944	2.777 694
$W_{24,3}^{64.8^\circ, 3, 1}$	1.805 554	0.126 788	2.799 434
$W_{24,3}^{55^\circ, 3, 0}$	1.868 698	0.203 468	2.716 875
$W_{24,3}^{55^\circ, 3, 1}$	1.790 041	0.104 520	2.772 505
$W_{24,3}^{45.84^\circ, 3, 0}$	1.845 958	0.187 242 8	2.949 810
$W_{24,3}^{45.84^\circ, 3, 1}$	1.803 867	0.120 335	3.029 442

如图 3 所示,地表 GDOP 分布的划分具有很强的规律性,且轨道倾角不改变这种划分,而仅改变划分的 GDOP 取值。因此,相比 GNSS 星座采用相同的最优轨道倾角(约为 55°),借助本文导出的条件方程(9),通过组合具有不同轨道倾角的 Walker 星座,更有利于改善地表 GDOP 分布的均匀性。

5.2 GLONASS 星座二次设计

利用式(9)可给出多种二次设计方案,下面仅讨论以下两种方案。

方案 1 在 GLONASS 中引入一个由 24 颗卫星构成的 Walker 星座,则由式(9)可得:

$$24 \times \cos^2 64.8^\circ + 24 \times \cos^2 \theta = \frac{48}{3} \quad (19)$$

即当 $\theta = 45.837 9^\circ$ 时,组合星座最优。星座 $W_{24,3}^{45.84^\circ, 3, 0}$ 和 $W_{24,3}^{45.84^\circ, 3, 1}$ 的地表 GDOP 分布情况由图 3(e)、3(f)给出。

为了验证方案 1,仿真组合星座 $W_{24,3}^{55^\circ, 3, 0} + W_{24,3}^{55^\circ, 3, 0}$,并计算地表 GDOP 分布。从图 4 和表 2 中可以发现,组合星座 $W_{24,3}^{64.8^\circ, 3, 0} + W_{24,3}^{45.84^\circ, 3, 0}$ 的地表 GDOP 均值、方差和最大值均明显小于组合星座 $W_{24,3}^{55^\circ, 3, 0} + W_{24,3}^{55^\circ, 3, 0}$ 的相应统计量。这进一步验证了通过式(9)组合不同轨道倾角的 Walker 构型具有更优越的性能。

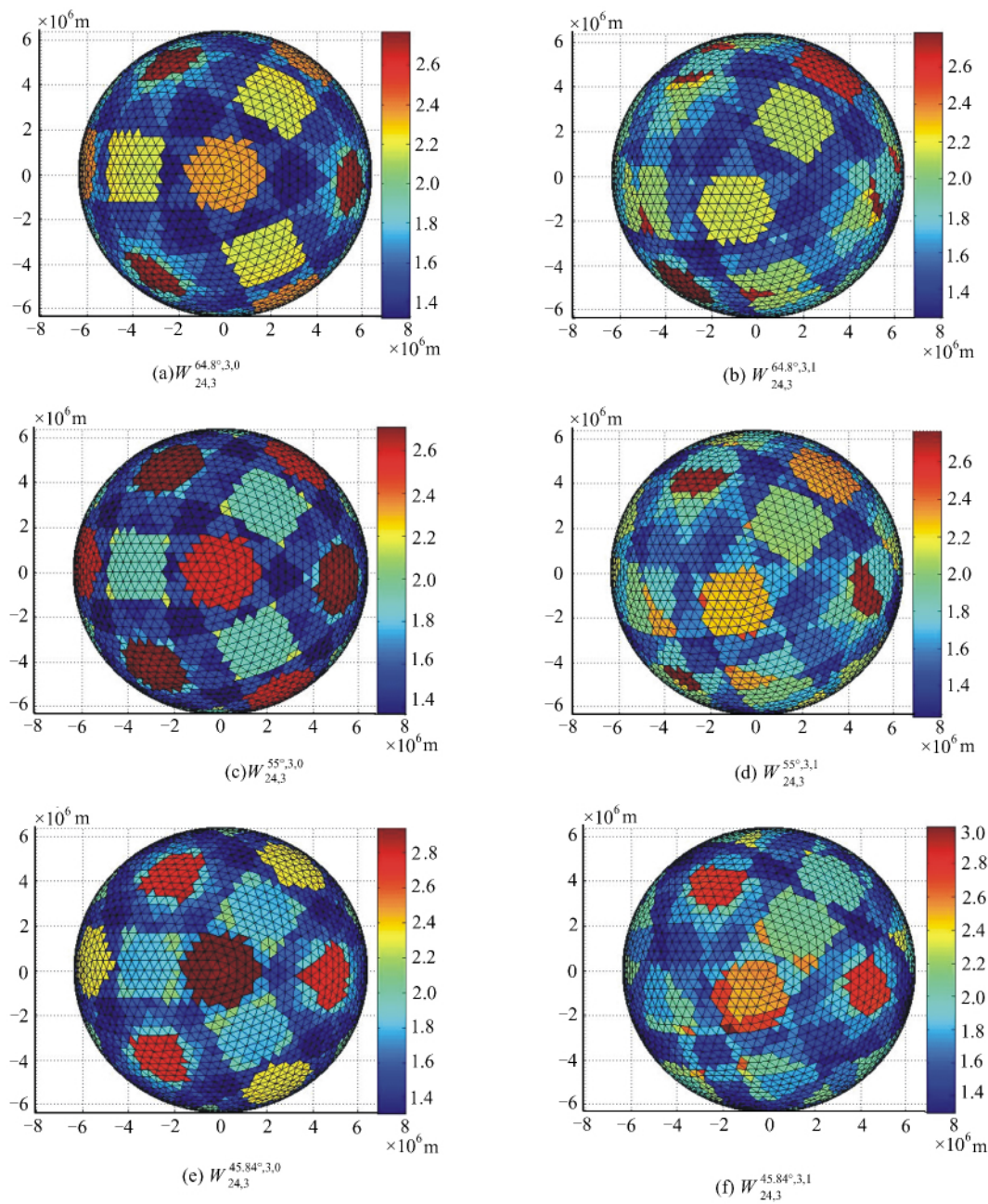


图 3 地表 GDOP 分布

Fig. 3 Distribution of Surface GDOP of the Earth

表 2 地表 GDOP 分布(二)

Tab. 2 Distribution of Surface GDOP of the Earth (Two)

星座构型	E (GDOP $''_{\text{surf}}$)	D (GDOP $''_{\text{surf}}$)	max (GDOP $''_{\text{surf}}$)
$W_{24,3}^{55^{\circ},3,0} + W_{24,3}^{55^{\circ},3,0}$	1.186 622	0.026 549	1.824 353
$W_{24,3}^{64.8^{\circ},3,0} + W_{24,3}^{45.84^{\circ},3,0}$	1.158 691	0.015 800	1.548 785

方案 2 在 GLONASS 中引入静地卫星轨道,则由式(9)可得:

$$12 - 36 \times \cos^2 64.8^{\circ} = M_2 \quad (20)$$

可得, $M_2=5.473\ 6$,即当引入 5~6 颗 GEO 卫星时(由正二十面体支撑 Walker 构型也可以得到

该结论),可改善 GLONASS 的地表 GDOP 分布。

为了验证方案 2,仿真组合星座 $W_{24,3}^{64.8^{\circ},3,0} + R_{6,3}^{64.8^{\circ},0,30^{\circ}}$ ($R_{6,3}^{64.8^{\circ},0,30^{\circ}}$ 表示 6 颗均匀分布于倾角为 64.8° 的倾斜轨道面内,其升交点角距和初始相位分别为 30° 和 0°) 和星座 $W_{24,3}^{64.8^{\circ},3,0} + R_{6,3}^{0^{\circ},0,30^{\circ}}$ ($R_{6,3}^{0^{\circ},0,30^{\circ}}$ 表示 6 颗均匀分布于赤道面的 GEO 卫星)。如表 3 和图 5 所示,对比上述两种组合星座的地表 GDOP 分布可得,组合星座 $W_{24,3}^{64.8^{\circ},3,0} + R_{6,3}^{0^{\circ},0,30^{\circ}}$ 的地表 GDOP 均值、方差和最大值均明显小于组合星座 $W_{24,3}^{64.8^{\circ},3,0} + R_{6,3}^{64.8^{\circ},0,30^{\circ}}$ 的相应统计量。这表明,要改善 GLONASS 星座的全球性能,应

重点考虑引入小倾角卫星轨道。

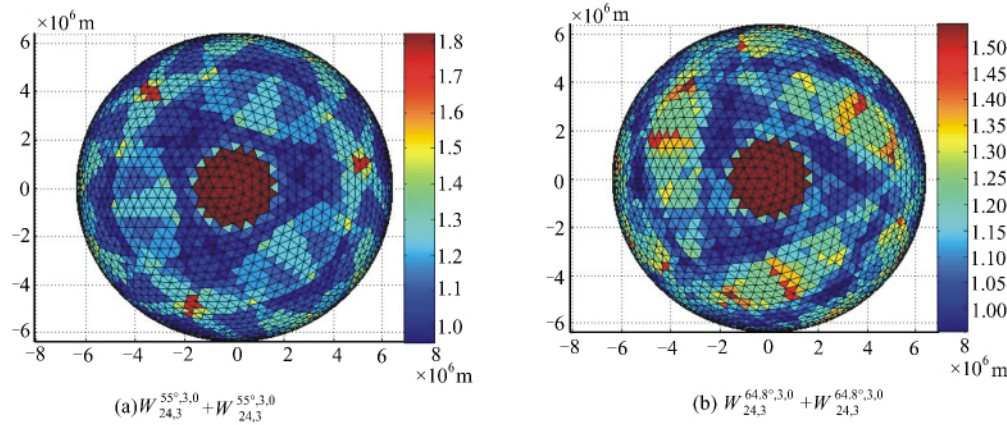


图 4 不同组合 Walker 构型的性能

Fig. 4 Performance of Different Combined Walker Configurations

表 3 地表 GDOP 分布(三)

Tab. 3 Surface GDOP of the Earth (Three)

星座构型	$E(\text{GDOP}_{\text{surf}}')$	$D(\text{GDOP}_{\text{surf}}')$	$\max(\text{GDOP}_{\text{surf}}')$
$W_{24,3}^{64.8^{\circ},3,0} + R_{6,3}^{0^{\circ},0,30^{\circ}}$	1.506 888 778	0.054 580 0	2.352 829 974
$W_{24,3}^{64.8^{\circ},3,0} + R_{6,3}^{64.8^{\circ},0,30^{\circ}}$	1.579 313 149	0.092 334 6	2.745 334 274

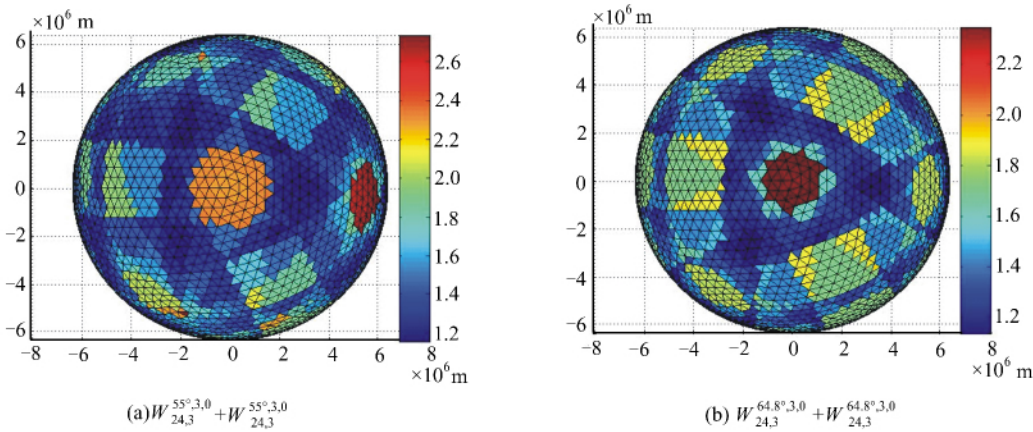


图 5 GLONASS 星座二次设计

Fig. 5 Quadratic Optimization to GLONASS

由于我国除海南、南海属于低纬度地区,大部分地区位于中纬度,因此,北斗 MEO 卫星采用 55° 轨道倾角的 Walker 构型和 GEO 混合星座具有现实意义。根据式(9),由于北斗星座引入了一定数目的 GEO 卫星,打破了 55° 倾角 MEO 卫星星座的最优性,可考虑与 GLONASS 星座进行组合改善全球地表 GDOP 分布(或根据式(9)调整 MEO 星座的轨道倾角)。根据星座的最优组合不变性^[17],可通过组合 GPS 星座和 GALLIEO 星座,进一步改善系统在中高纬度地区的 GDOP 覆盖性能。

6 结 语

(1) GPS 卫星星座采用的轨道倾角非常接近单 Walker 构型的地心 GDOP 极值条件,但若所有 GNSS 轨道倾斜轨道倾角均采用 54.74° ,虽然多系统组合后的定位构型满足地心 GDOP 极值条件,但这并不满足多系统组合应用的地表均匀覆盖需求。对于新兴的 GNSS 星座,可采用本文给出的最小 GDOP 组合 Walker 构型,改善单一 Walker 构型的空间覆盖性能。

(2) GLONASS 星座构型的轨道倾角采用

64.8°,虽然该星座构型不满足地心 GDOP 极值条件,但在提高高纬地区的信号覆盖具有重要意义。在赤道轨道上引入一定数量的 GEO 卫星,可以改善 GLONASS 星座的全球地表 GDOP 分布,此外,通过引入由 24 颗卫星构成的轨道倾角为 45.84°的 Walker 构型也可全面改善该星座的地表 GDOP 全球覆盖性能,该组合星座性能优于由 48 颗卫星构成的轨道倾角为 54.74°的单一 Walker 构型。

(3) 在 GNSS 组合 Walker 星座设计中,使用式(9)将近似等价于地心 GDOP 极值约束、地表 GDOP 极值。

(4) 类似于导航卫星信号频率资源的国际分配机制,按照本文导出的条件方程分配和发展国家/区域单 Walker 构型,可确保组合 Walker 星座具有最佳定位精度。

(5) Walker 星座的调相因子虽然不能改善地心 GDOP,对在改善地表 GDOP 均值和方差方面具有一定的价值。

参 考 文 献

- [1] Grafarend E W. Optimization of Geodetic Networks [J]. *Boll Geod Sci Aff*, 1974, 33:351-406
- [2] Schmitt G. Optimal Design of Geodetic Networks [J]. *Deutsche Geodatische Kommission, München B*, 1982, 258: 82-89
- [3] Yang Yuanxi. Progress, Contribution and Challenges of Compass/BeiDou Satellite Navigation System [J]. *Acta Geodaetica et Cartographica Sinica*, 2010, 39(1): 1-6(杨元喜. 北斗卫星导航系统的进展、贡献与挑战[J]. *测绘学报*, 2010, 39(1):1-6)
- [4] Yang Yuanxi. Some Notes on Uncertainty, Uncertainty Measure and Accuracy in Satellite Navigation [J]. *Acta Geodaetica et Cartographica Sinica*, 2012, 41(5):646-650(杨元喜. 卫星导航的不确定性、不确定度与精度若干注记[J]. *测绘学报*, 2012, 41(5):646-650)
- [5] Yang Yuanxi, Li Jinlong, Xu Junyi, et al. Contribution of the Compass Satellite Navigation System to Global PNT Users [J]. *Chinese Science Bulletin*, 2011, 56:2 813-2 819
- [6] Kihara M, Okada T. A Satellite Selection Method and Precision for the Global Positioning System [J]. *Navigation*, 1984, 31:8-20
- [7] Li Jianwen, Li Zuohu, Zhou Wei, et al. Study on the Minimum of GDOP in Satellite Navigation and Its Applications [J]. *Acta Geodaetica et Cartographica Sinica*, 2011, 40(S1): 86-88(李建文, 李作虎, 周巍, 等. 卫星导航中几何精度衰减因子最小值分析及应用[J]. *测绘学报*, 2011, 40(S1): 86-88)
- [8] Deng Ping, Yu Lijian. GDOP Performance Analysis of Cellular Location System [J]. *Journal of Southwest Jiaotong University*, 2005, 40(2):184-188(邓平, 余立建. 蜂窝定位系统 GDOP 性能分析[J]. *西南交通大学学报*, 2005, 40(2):184-188)
- [9] Feng Zunde, Lu Xiushan, Guo Ying. Diagnosis of Figure Advantage in Space Intersecting Model of Distance Measurement [J]. *Bulletin of Surveying and Mapping*, 2004, 12(1): 24-26(冯遵德, 卢秀山, 郭英. 测距空间交会测量模式中交会图形优劣的诊断[J]. *测绘通报*, 2004, 12(1): 24-26)
- [10] Li Deren. A Thought of Optimization and Design of Geodetic Networks in Consideration of Accuracy and Reliability[J]. *Acta Geodaetica et Cartographica Sinica*, 1989, 18(4): 241-248(李德仁. 顾及精度与可靠性的测量控制网优化设计的设想[J]. *测绘学报*, 1989, 18(4): 241-248)
- [11] Li Deren, Zhou Yongqian. A Thought of Optimization and Design of Geodetic Networks in Consideration of Accuracy and Reliability [J]. *Journal of Wuhan Technical University of Surveying and Mapping*, 1991, 16(2):47-54(李德仁, 周勇前. 顾及精度与可靠性的测量控制网优化设计[J]. *武汉测绘科技大学学报*, 1991, 16(2):47-54)
- [12] Gao Yang. Optimal Design of Geodetic Networks Considering both Precision and Reliability Criteria [J]. *Acta Geodaetica et Cartographica Sinica*, 1987, 16(3):232-239(高扬. 同时顾及精度和可靠性准则的控制网优化设计[J]. *测绘学报*, 1987, 16(3):232-239)
- [13] Zhang Zhenglu, Luo Nianxue, Huang Quanyi, et al. A New Method Based on Reliability of Engineering Control Network for Nets Optimization [J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2001, 26(4):354-360(张正禄, 罗年学, 黄全义, 等. 一种基于可靠性的工程控制网优化设计新方法[J]. *武汉大学学报·信息科学版*, 2001, 26(4):354-360)
- [14] Xue Shuqiang. Matrix Volume and Its Applications in Network Design [D]. Beijing: Chinese Academy of Surveying and Mapping, 2007(薛树强. 矩阵体积及其在网形设计中的应用[D]. 北京:中国测绘科学研究院, 2007)
- [15] Xue Shuqiang, Yang Yuanxi, Chen Wu, et al. Positioning Configuration with Minimum GDOP from Orthogonal Trigonometric Functions[J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*,

- 2014, 39(7):820-825 (薛树强, 杨元喜, 陈武, 等. 正交三角函数导出的一类最小 GDOP 测距单点定位构型解集[J]. 武汉大学学报·信息科学版, 2014, 39(7):820-825)
- [16] Xue Shuqiang, Yang Yuanxi. Nested Cones of Single-point-Positioning Configuration with Minimal GDOP[J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2014, 39(11):1 369-1 374 (薛树强, 杨元喜. 最小 GDOP 测距单点定位构型的一种嵌套圆锥结构[J]. 武汉大学学报·信息科学版, 2014, 39(11):1 369-1 374)
- [17] Xue Shuqiang, Yang Yuanxi. Positioning Configurations with the Lowest GDOP and Their Classification[J]. *Journal of Geodesy*, 2015, 89(1): 49-71
- [18] Xue Shuqiang, Yang Yuanxi, Dang Yamin, et al. Dynamic Positioning Configuration and Its First-order Optimization[J]. *Journal of Geodesy*, 2014, 88(2): 127-143
- [19] Lannes A, Teunissen P J G. GNSS Algebraic Structures[J]. *Journal of Geodesy*, 2011, 85:273-290
- [20] Walker J G. Satellite Constellations[J]. *Journal of the British Interplanetary Society*, 1984, 37: 559-571
- [21] Yarlagadda R, Ali I, Al-Dhahir N, et al. GPS GDOP Metric[J]. *IEE Proceedings—Radar, Sonar and Navigation*, 2000, 147: 259-264

Combined Walker Configurations with Minimal GDOP

XUE Shuqiang^{1,2} YANG Yuanxi³

1 School of Geological and Surveying Engineering, Chang'an University, Xi'an 710054, China

2 Chinese Academy of Surveying and Mapping, Beijing 100830, China

3 National Key Laboratory for Geo-information Engineering, Xi'an Research Institute of Surveying and Mapping, Xi'an 710054, China

Abstract: The GDOP (geometric dilutions of precision) is a key criterion to measure the graphic intensity of single-point-positioning configurations. Revealing the geometry of configurations with minimal GDOP has practical significance in the optimization design of single GNSS satellite constellation or multi-constellations. From the common used Walker configuration, we deduce a conditional equation to the combined Walker configurations to minimize the GDOP. The GDOP distribution on the surface of the Earth is discussed in terms of the conditional equation for minimizing the GDOP. Simulations were performed to verify the main results.

Key words: GNSS constellation; positioning configuration; Walker configuration; distance equation; optimal configuration

First author: XUE Shuqiang, PhD candidate, specializes in error theory and adjustment. E-mail: xuesq@casm.ac.cn

Foundation support: The National Science Foundation of China, Nos. 41020144004, 41104018, 41474011; the National Key Technology Support Program, No. 2012BAB16B01; the National High-tech R&D Program (863 Program) of China, Nos. 2009AA121405, 2013AA122501; IGMAS, No. GFZX0301040308-06; the Fujian Province Key Laboratory of Coast and Island Management Technology Study, No. 201403.