DOI:10.13203/j.whugis20130355 文章编号:1671-8860(2014)09-1033-05

加乘性混合误差模型参数估计方法及其应用

师 芸[1]

1 西安科技大学测绘科学与技术学院,陕西 西安,710054

摘 要:扩展乘性误差模型的参数估计方法至加乘性混合误差模型,推导了其参数最小二乘、加权最小二乘参数估计,并在偏差分析的基础上推导了偏差改正加权最小二乘估计。模拟计算和分析验证了偏差改正加权最小二乘适用于加乘性混合误差模型的大地测量数据处理,具有二阶近似无偏性,且精度较高。

关键词:加乘性混合误差模型;最小二乘;加权最小二乘;偏差改正加权最小二乘

中图法分类号:P207.2 文献标志码:A

随着现代测绘技术的快速发展,以电磁波为载体的测量信号的误差表现为加性误差、乘性误差或加乘性混合误差。尽管乘性误差模型已经有了大量的理论和应用研究成果,但在大地测量领域相关研究几近空白。因此,在大地测量数据处理领域,针对乘性或加乘性混合误差模型,迫切需要研究相应的平差方法,丰富并完善大地测量数据处理理论。

乘性误差模型的平差方法可以分为拟似然法与最小二乘法两类。其中,拟似然法已经发展成为乘性误差模型参数估计的主流方法[1-5]。拟似然法的主要问题包括:① 目标函数不明确。尽管已证明如果观测量的概率密度函数为指数分布,拟似然法等同于极大似然法,但众所周知,大地测量观测数据一般服从正态分布而不是指数分布。从这个意义上说,拟似然法在指数分布族下的最优性可能不再适用于大地测量观测数据;② 从数值解算的角度来讲,拟似然法完全由一组非线性方程组决定,当存在多组解时,无法确定哪个解是拟似然解。

乘性误差模型平差的最小二乘法由文献[6]提出。因为加权最小二乘法是有偏估计,文献[6]进一步提出了偏差改正加权最小二乘参数估计法,本文进一步完善文献[6]的工作,把乘性误差模型的偏差改正加权最小二乘参数估计方法推广到加乘性混合误差模型。本文首先分别推导出该模型下的最小二乘估计和加权最小二乘估计;其次,在对加权最小二乘估计进行偏差分析的基础上,导出模型参数的偏差改正最小二乘解;最后,将所推导的理论与方法应用到LiDAR数据处理中,根据模拟的LiDAR数据分析比较计算结果。

1 加乘性混合误差模型的表达及其参数估计

给定一组大地测量观测值 $y_i(i=1,2,\cdots,n)$,则其线性加乘性混合误差模型可以表达为:

$$y_i=(\boldsymbol{x}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta})(l+\boldsymbol{\varepsilon}_{mi})+\boldsymbol{\varepsilon}_{ai},i=1,2,\cdots,n \tag{1}$$

其矩阵形式为:

$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{X\beta}\odot(1+\boldsymbol{\varepsilon}_m)+\boldsymbol{\varepsilon}_a \tag{2}$$

式中,$\odot$是向量或者矩阵的Hadamard乘积;$\boldsymbol{y}$是$n\times1$阶观测值向量;$\boldsymbol{X}$是$n\times t$阶设计矩阵;$\boldsymbol{\beta}$是$t\times1$阶未知参数向量;$\boldsymbol{l}=[1\quad1\quad\cdots\quad1]^{\mathrm{T}}$;$\boldsymbol{\varepsilon}_{mi}$和$\boldsymbol{\varepsilon}_{ai}$分别是零均值随机乘性误差和加性误差,$\boldsymbol{\varepsilon}_m$和$\boldsymbol{\varepsilon}_a$分别是其向量表达式。

对于任意两个一般的乘性和加性误差的方差协方差矩阵$\boldsymbol{\Sigma}_m=\sigma_m^2\boldsymbol{Q}_m$,$\boldsymbol{\Sigma}_a=\sigma_a^2\boldsymbol{Q}_a$,如果$\boldsymbol{Q}_m$和$\boldsymbol{Q}_a$都是正定阵,总可以利用Cholesky分解,通过观测值和参数的线性变换,把$\boldsymbol{Q}_m$和$\boldsymbol{Q}_a$转换成单位阵。因此,不失一般性,假设乘性误差$\boldsymbol{\varepsilon}_m$和加性误差$\boldsymbol{\varepsilon}_a$彼此独立且各自具有相同的方差,即$\boldsymbol{\Sigma}_m=\sigma_m^2\boldsymbol{I}$,$\boldsymbol{\Sigma}_a=\sigma_a^2\boldsymbol{I}$,$\mathrm{cov}(\boldsymbol{\varepsilon}_m,\boldsymbol{\varepsilon}_a)=0$,则可以获得加乘性混合误差模型观测值的期望和方差阵分别为:

$$E(\boldsymbol{y})=\boldsymbol{X\beta} \tag{3}$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_y=\mathrm{diag}((\boldsymbol{x}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta})^2)\sigma_m^2+\boldsymbol{I}\sigma_a^2 \tag{4}$$

其中,σ_m^2和σ_a^2分别为$\boldsymbol{\varepsilon}_m$和$\boldsymbol{\varepsilon}_a$的单位权方差;diag

收稿日期:2014-07-25

项目来源:国家自然科学基金资助项目(41204006);陕西省教育厅专项资助项目(2013JK0960)。

第一作者:师芸,博士,副教授,主要从事大地测量数据处理研究。E-mail:shiyun0908@hotmail.com

$((\boldsymbol{x}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta})^2)$ 为对角线上元素为 $(\boldsymbol{x}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta})^2$ 的对角阵。可以看出，在加乘性混合误差模型中，观测值的方差-协方差阵与未知参数 $\boldsymbol{\beta}$ 有关，是未知参数的函数。

1.1 加乘性混合误差模型的最小二乘估计

应用普通最小二乘准则于模型(1)，得目标函数：

$$\min: F_1 = (\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X\beta})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X\beta}) \tag{5}$$

目标函数(9)的最优解就是 $\boldsymbol{\beta}$ 的最小二乘估计，即：

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{LS}} = (\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \tag{6}$$

根据式(6)，我们可以证明，线性加乘性混合误差模型的普通最小二乘估计 $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{LS}}$ 是未知参数 $\boldsymbol{\beta}$ 的无偏估计，但不具有最优性，即方差最小性。

1.2 加乘性混合误差模型的加权最小二乘估计

加乘性混合误差模型加权最小二乘准则的目标函数为：

$$\min: F = (\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X\beta})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}_y^{-1}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X\beta}) \tag{7}$$

对式(7)求未知参数 $\boldsymbol{\beta}$ 的偏导数，并令其等于0有：

$$2\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_y^{-1}(\boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{WLS}}-\boldsymbol{y}) + \begin{bmatrix} (\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{WLS}})^{\mathrm{T}}\dfrac{\partial\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_y^{-1}}{\partial\boldsymbol{\beta}_1}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{WLS}}) \\ \vdots \\ (\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{WLS}})^{\mathrm{T}}\dfrac{\partial\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_y^{-1}}{\partial\boldsymbol{\beta}_t}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{WLS}}) \end{bmatrix} = 0 \tag{8}$$

其中，$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{WLS}}$ 是 $\boldsymbol{\beta}$ 的加权最小二乘估计；$\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_y$ 是 $\boldsymbol{\Sigma}_y$ 的估值。应用矩阵微分原理，并记 $\boldsymbol{D}_1 = \mathrm{diag}(\boldsymbol{x}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta})$，$\boldsymbol{x}_i = [x_{1i} \quad x_{2i} \quad \cdots \quad x_{ni}]^{\mathrm{T}}$，有：

$$\frac{\partial\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_y^{-1}}{\partial\boldsymbol{\beta}_i} = \frac{-2\sigma_m^2\,\mathrm{diag}(\boldsymbol{x}_i)\boldsymbol{D}_1}{[(\boldsymbol{x}_i^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{WLS}}))^2\sigma_m^2+\sigma_a^2]^2} \tag{9}$$

将式(9)代入式(8)得：

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_y^{-1}\boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{WLS}}) - \boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_y^{-1}\boldsymbol{y} - \boldsymbol{V}_\varepsilon = 0 \tag{10}$$

其中，$\mathrm{diag}(\boldsymbol{x}_i)$ 表示对角元素为 $x_{ji}(j=1,2,\cdots n)$ 的对角阵；

$$\boldsymbol{V}_\varepsilon = \begin{bmatrix} (\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{WLS}}))^{\mathrm{T}}\sigma_m^2\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_y^{-2}\mathrm{diag}(\boldsymbol{x}_1)\hat{\boldsymbol{D}}_1(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{WLS}})) \\ \vdots \\ (\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{WLS}}))^{\mathrm{T}}\sigma_m^2\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_y^{-2}\mathrm{diag}(\boldsymbol{x}_t)\hat{\boldsymbol{D}}_1(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{WLS}})) \end{bmatrix} \tag{11}$$

求解方程(10)，得加乘性混合误差模型的(形式)解为：

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{WLS}} = (\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_y^{-1}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_y^{-1}\boldsymbol{Y} + (\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_y^{-1}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{V}_\varepsilon \tag{12}$$

即使信号 $\boldsymbol{x}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}$ 是线性的，因为 $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_y$ 与 $\boldsymbol{V}_\varepsilon$ 都是 $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{WLS}}$ 的函数，加权最小二乘参数估计本质上说是观测值的非线性函数。由非线性回归分析可知，函数的非线性特性必将使估计产生偏差。因此，在加乘性混合误差模型中，加权最小二乘估计将不再具有无偏的统计特性。

2 加乘性混合误差模型的加权最小二乘估计偏差分析

在对模型的加权最小二乘估计进行偏差分析之前，先在未知参数的真值 β 处，对观测值的方差协方差阵 $\boldsymbol{\Sigma}_y^{-1}$ 进行泰勒级数的一阶近似展开，得：

$$\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_y^{-1} = \boldsymbol{\Sigma}_y^{-1} + \delta\boldsymbol{\Sigma}_y^{-1} \tag{13}$$

其中，

$$\delta\boldsymbol{\Sigma}_y^{-1} = \mathrm{diag}\left\{\frac{2\sigma_m^2(\boldsymbol{x}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta})(\boldsymbol{x}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{r})}{[(\boldsymbol{x}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta})\sigma_m^2+\sigma_a^2]^2}\right\} \tag{14}$$

式(18)中，r 为观测值的残差值，即：

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{\beta}} \tag{15}$$

若记加权最小二乘估计与其真值之差为 b，则有：

$$\boldsymbol{b} = \hat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{WLS}} - \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{A\varepsilon} + \boldsymbol{b}_{\boldsymbol{\beta}} \tag{16}$$

式中，$\boldsymbol{\varepsilon} = [\boldsymbol{\varepsilon}_m^{\mathrm{T}} \quad \boldsymbol{\varepsilon}_a^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 无关，是一个确定的系数矩阵；$\boldsymbol{b}_\beta$ 是 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 的二次型。将式(16)代入式(15)得：

$$\boldsymbol{r} = (\boldsymbol{X\beta})\odot\boldsymbol{\varepsilon}_m + \boldsymbol{\varepsilon}_a - \boldsymbol{Xb} = (\boldsymbol{X\beta})\odot \boldsymbol{\varepsilon}_m + \boldsymbol{\varepsilon}_a - \boldsymbol{XA\varepsilon} - \boldsymbol{X}\,\boldsymbol{b}_{\boldsymbol{\beta}} \tag{17}$$

再将式(16)、(13)和(2)代入式(10)得：

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\Sigma}_y^{-1}+\delta\boldsymbol{\Sigma}_y^{-1})\boldsymbol{X}(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{b}) - \boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\Sigma}_y^{-1} + \delta\boldsymbol{\Sigma}_y^{-1})[(\boldsymbol{X\beta})\odot(\boldsymbol{l}+\boldsymbol{\varepsilon}_m)+\boldsymbol{\varepsilon}_a] - \boldsymbol{V}_{\boldsymbol{\varepsilon}} = 0$$

化简得：

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}_y^{-1}\boldsymbol{Xb} + \boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\delta\boldsymbol{\Sigma}_y^{-1}\boldsymbol{Xb} - \boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}_y^{-1}\{(\boldsymbol{X\beta})\odot \boldsymbol{\varepsilon}_m\} - \boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}_y^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}_a - \boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\delta\boldsymbol{\Sigma}_y^{-1}\{(\boldsymbol{X\beta})\odot\boldsymbol{\varepsilon}_m\} - \boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\delta\boldsymbol{\Sigma}_y^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}_a - \boldsymbol{V}_{\boldsymbol{\varepsilon}} = 0 \tag{18}$$

若仅仅保留等式(18)中等号左边项中关于 $\boldsymbol{\varepsilon} = (\boldsymbol{\varepsilon}_m\ \boldsymbol{\varepsilon}_a)$ 的二阶项，忽略其所有的一阶项和高于二阶的高阶项，并令

$$\boldsymbol{c} = -\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\delta\boldsymbol{\Sigma}_y^{-1}\boldsymbol{XA\varepsilon} + \boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\delta\boldsymbol{\Sigma}_y^{-1}[(\boldsymbol{X\beta})\odot\boldsymbol{\varepsilon}_m] + \boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\delta\boldsymbol{\Sigma}_y^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}_a$$

记 $\boldsymbol{e}_i = [0 \quad 0 \cdots \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad \cdots \quad 0]$，即第 i 个元素为1，其余元素都为0，则在若干数学推导后 $\boldsymbol{c}$ 向量变为：

$$\boldsymbol{c} = -\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix} \dfrac{\sigma_m^2(\boldsymbol{x}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta})\,\boldsymbol{x}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A\varepsilon}}{[(\boldsymbol{x}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta})^2\sigma_m^2+\sigma_a^2]^2} \\ \vdots \\ \dfrac{\sigma_m^2(\boldsymbol{x}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta})\,\boldsymbol{x}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A\varepsilon}}{[(\boldsymbol{x}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta})^2\sigma_m^2+\sigma_a^2]^2} \end{bmatrix} +$$

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}\dfrac{\sigma_m^2(\boldsymbol{x}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta})\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{e}_1\{(\boldsymbol{x}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta})\odot\boldsymbol{\varepsilon}_m+\boldsymbol{\varepsilon}_a\}}{[(\boldsymbol{x}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta})^2\sigma_m^2+\sigma_a^2]^2}\\ \vdots \\ \dfrac{\sigma_m^2(\boldsymbol{x}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta})\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_n\boldsymbol{e}_n\{(\boldsymbol{x}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta})\odot\boldsymbol{\varepsilon}_m+\boldsymbol{\varepsilon}_a\}}{[(\boldsymbol{x}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta})^2\sigma_m^2+\sigma_a^2]^2}\end{bmatrix} \tag{19}$$

其中,若记符号 $\boldsymbol{N}$ 为:

$$\boldsymbol{N}=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}_y^{-1}\boldsymbol{X} \tag{20}$$

则有:

$$\boldsymbol{NA\varepsilon}-\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}_y^{-1}\{(\boldsymbol{X\beta})\odot\boldsymbol{\varepsilon}_m+\boldsymbol{\varepsilon}_a\}=0 \tag{21}$$

根据误差传播定律可以推导出:

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{A\varepsilon})=\boldsymbol{N} \tag{22}$$

$$\mathrm{cov}\{(\boldsymbol{X\beta})\odot\boldsymbol{\varepsilon}_m+\boldsymbol{\varepsilon}_a,\boldsymbol{A\varepsilon}\}=\boldsymbol{XN}^{-1} \tag{23}$$

对式(19)求期望,应用式(22)和式(23)的结果,得 $\boldsymbol{c}$ 矩阵的第 i 元素为:

$$c_i=-\mathrm{tr}\{\boldsymbol{x}_i\boldsymbol{x}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}^{-1}\}+\mathrm{tr}\{\boldsymbol{x}_i\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{XN}^{-1}\}=0 \tag{24}$$

对等式(18)两边取期望,并应用式(21)和式(24)的结果,式(18)可重写为:

$$E\{\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}_y^{-1}\boldsymbol{X}\,\boldsymbol{b}_{\beta}\}-E\{\boldsymbol{V}_{\varepsilon}\}=0 \tag{25}$$

由此可得加乘性混合误差模型中未知参数加权最小二乘估计的偏差,记为 $\bar{\boldsymbol{b}}_{\beta}$,即:

$$\bar{\boldsymbol{b}}_{\beta}=E(\boldsymbol{b}_{\beta})=\boldsymbol{N}^{-1}E\{\boldsymbol{V}_{\varepsilon}\} \tag{26}$$

$\boldsymbol{V}_{\varepsilon}$ 取决于观测量方差协方差距阵对未知参数的导数,在加乘性混合误差模型中,该导数不会等于零,因此,加乘性混合误差模型中观测量方差协方差距阵是未知参数函数的事实直接导致加权最小二乘参数估计产生偏差。

3　加乘性混合误差模型的偏差改正加权最小二乘估计

分析比较模型加权最小二乘未知参数估计的偏差发现,偏差项完全对应了目标函数的第二项,因此,去掉方程式(8)中左边的第二项,就能够得到模型偏差改正后的加权最小二乘参数估值,称为偏差改正加权最小二乘估计,记为 $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{bc}$:

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}_y^{-1}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}_{bc})=0 \tag{27}$$

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{bc}=(\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}_y^{-1}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}_y^{-1}\boldsymbol{y} \tag{28}$$

对式(27)、(28)进行统计分析可知,加乘性混合误差模型的偏差纠正加权最小二乘估计近似二阶无偏。

4　数值实例

模拟的例子是通过采集的 LiDAR 数据产生数字地面模型(DTM)。DTM 模型由公式:

$$f(x,y)=9.0+0.4x+0.3y-0.5xy-0.4\boldsymbol{x}^2+0.5\boldsymbol{y}^2 \tag{29}$$

计算产生,如图 1 所示。相应的加乘性混合噪声模型的观测方程为:

$$h(x,y)=f(x,y)(1+\boldsymbol{\varepsilon}_m)+\boldsymbol{\varepsilon}_a \tag{30}$$

本文模拟算例的 x 与 y 区域均采用[0,50]。观测值由 x 与 y 方向各 1 000 个采样点构成的格网点组成,待估参数是式(29)的 6 个系数,乘性与加性误差的标准差分别为 0.2 和 0.3。

为了比较分析最小二乘估计(LS)、加权最小二乘估计(WLS)和偏差改正加权最小二乘估计(BCWLS),本文模拟了1 000组独立的随机数据,其中 1 组随机数据所对应的 DTM 见图 2。定权时,假定单位权方差为 0.09。根据上述模拟数据,分别利用 3 种估计方法计算了 6 个待估系数和单位权方差,共 1 000 组估计结果,其均值、标准差、加权最小二乘估计的偏差及其均方差根分别见表 1、2。

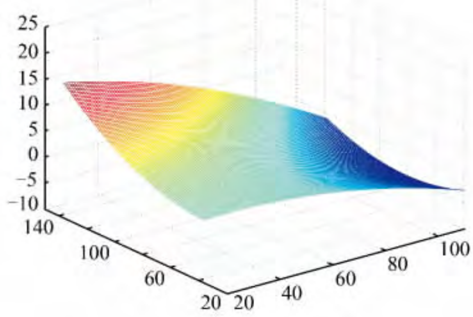

图 1　模拟的 DTM 格网图

Fig. 1　Simulated True DTM Surface

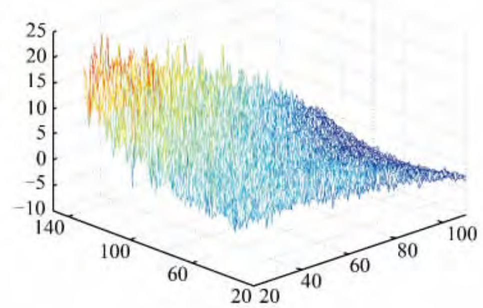

图 2　受加乘性混合噪声干扰的 DTM 格网图

Fig. 2　DTM Surface with Additive/Multiplicative Errors

表1 3种方法参数估计的均值$\bar{\beta}$和$\bar{\sigma}$

Tab.1 Mean Values of Estimated Parameters and Estimates of the Variance of Unit Weight from the Three Methods

方法	β_1	β_2	β_3	β_4	β_5	β_6	σ
LS	9.000 1	0.401 3	0.299 3	−0.500 0	−0.400 2	0.499 9	1.987 7
BCWLS	9.001 4	0.400 9	0.298 5	−0.499 7	−0.400 3	0.500 0	0.300 0
WLS	9.361 2	0.417 8	0.310 0	−0.519 6	−0.416 4	0.520 0	0.294 8

表2 3种方法的精度以及加权最小二乘的偏差

Tab.2 Standard Deviations of Parameters from Three Methods, Biases of the Weighted LS Estimate and Its Root Mean Squared Errors

方　法	β_1	β_2	β_3	β_4	β_5	β_6
LS	0.090 8	0.058 5	0.053 4	0.010 2	0.010 7	0.011 0
BCWLS	0.080 9	0.042 8	0.036 6	0.006 6	0.006 5	0.005 4
WLS	0.082 7	0.043 4	0.037 3	0.006 7	0.006 6	0.005 5
WLS偏差	0.361 2	0.017 8	0.010 0	−0.019 6	−0.016 4	0.020 0
WLS均方差根	0.370 6	0.047 0	0.038 6	0.020 8	0.017 7	0.020 8

由表1可以看出，对于加乘性混合误差模型，普通最小二乘与偏差改正加权最小二乘的结果与真值之差统计上没有显著差异(见表2的精度结果)。但是，加权最小二乘方法估计与真值之差很大，存在明显的偏差。因此，可以说算例验证了本文的理论分析，即对于线型的加乘性混合误差模型，普通最小二乘与偏差改正加权最小二乘估计是无偏的，而加权最小二乘方法估计是有偏的。表面上看，表1中的参数最小二乘估计似乎比偏差改正加权最小二乘估计更加接近真值。实际上，因为表1中的结果是1 000次独立实验的平均值，只能用其来说明估计是有偏的还是无偏的。再结合表2的精度结果，不难知道，表1中的参数最小二乘结果与偏差改正加权最小二乘结果没有统计意义上的差异。对于单位权方差估计，加权最小二乘与偏差改正加权最小二乘的结果远优于普通最小二乘的结果。事实上，因为普通最小二乘采用的是不正确的权，所以单位权方差估计是有偏的(参见文献[7])。由表2可以看出，偏差改正加权最小二乘估计的精度最好。尽管加权最小二乘的标准差优于普通最小二乘，但是，因为加权最小二乘估计的偏差，参数(β_1，β_4，β_5，β_6)的均方差根反而比普通最小二乘大得多。

5 结　语

为了完善测量数据处理理论，本文在文献[6]工作的基础上，扩展了最小二乘、加权最小二乘、偏差改正最小二乘3种估计方法至加乘性混合误差模型，并对加权最小二乘估计的偏差进行分析，证明了偏差改正加权最小二乘的二阶近似无偏特性。模拟结果证实普通最小二乘与偏差改正加权最小二乘的结果是无偏的。3种加乘性混合误差模型参数最小二乘估计方法中，偏差改正最小二乘方法精度最高。

参　考　文　献

[1] Crowder M. On the Use of a Working Correlation Matrix in Using Generalised Linear Models for Repeated Measures[J]. *Biometrika*, 1995,82:407-410

[2] Desmond A F. Optimal Estimating Functions, Quasi-Likelihood and Statistical Modeling[J]. *J Stat Plan Inference*, 1997,60:77-123

[3] Heyde C C. Quasi-Likelihood and Its Applications[M]. New York:Springer, 1997

[4] Kukusha A, Malenkoa A, Schneeweissb H. Optimality of Quasi-Score in the Multivariate Mean-Variance Model with an Application to the Zero-Inflated Poisson Model with Measurement Errors[J]. *Statistics*, 2010,44:381-396

[5] Fitzmauric G M. A Caveat Concerning Independence Estimating Equations with Multivariate Binary Data[J]. *Biometrics*, 1995,51:309-317

[6] Xu P L, Shimada S. Least Squares Parameter Estimation in Multiplicative Noise Models[J]. *Communications in Statistics*, 2000,(B29):83-96

[7] Xu P L. The Effect of Incorrect Weights on Estimating the Variance of Unit Weight[J]. *Stud Geophys Geod*, 2013,(57):339-352

Least Squares Parameter Estimation in Additive/Multiplicative Error Models for Use in Geodesy

SHI Yun[1]

1　School of Geomatics, Xi'an University of Science and Technology, Xi'an 710054, China

Abstract: Adjustment methods for parameter estionation were basically developed on the basis of additive random error models. With advances in the technology for modern geodetic observation, measurement errors can change with functional models such as EDM, GPS and VLBI baselines. Thus, random errors in measurements are proportional to the true values of the measurements themselves. Observational models of this type are called multiplicative error models. The purpose of this paper is to complement or extend the work of Xu and Shimada (2000) to mixed additive and multiplicative error models. We briefly discuss three least squares (LS) adjustment methods for parameter estimation in mixed additive and multiplicative error models. In case of the weighted LS adjustment, we explicitly describe the biases in the adjusted parameters. Then, we construct a bias-corrected weighted least squares estimator. Finally, we demonstrate that the bias-corrected weighted LS method is optimal and unbiased using a simulated example.

Key words: additive/multiplicative mixed error models; least squares; weighted least squares; bias-corrected weighted least squares

First author: SHI Yun, PhD, associate professor, specializes in geodetic data processing. E-mail: shiyun0908@hotmail.com

Foundation support: The National Naturel Science Foundation of China, No. 41204006; the Special Foundation of Education Department of Shanxi Provincial Government, China, No. 2013JK0960.