

# 复杂多边形中轴构建方法

王新生<sup>1</sup> 谢凯<sup>1</sup> 姜友华<sup>2</sup> 郭光毅<sup>1</sup>

1 湖北大学资源环境学院,湖北 武汉,430062

2 武汉大学土木建筑工程学院,湖北 武汉,430072

**摘要:**多边形中轴是指与多边形不同边(或边的延长线)上的两个或两个以上点等距离的点轨迹。多边形中轴的图形结构表明,在多边形凸顶点处存在中轴线,而在凹顶点处不存在中轴线(中轴线在多边形外)。采用左右点法实现对多边形顶点凹凸性的判断,进而定义和标注多边形不同边界线段。借助 ArcGIS 软件,提出了构建任意复杂多边形中轴的两种逼近方法:一种是基于 Voronoi 图的矢量方法;另一种是基于欧氏距离区域分配的栅格方法。实验表明这两种方法都是有效的、可行的。

**关键词:**复杂多边形;中轴;多边形顶点凹凸性;Voronoi 图;区域分配

中图法分类号:P208

文献标志码:A

中轴的定义包括草地着火模型(*grass-fire model*)和最大圆盘模型(*maximal disk model*)。前者是 Blum 给出的中轴定义:假设图形的边界点同时着火,火源向图形内部各个方向等速燃烧直至熄灭,所有熄灭点形成的点集构成了该图形的中轴<sup>[1]</sup>,后者指出平面几何图形的中轴是内切于几何图形边界至少两点的最大圆圆心的轨迹(图1)<sup>[2-3]</sup>,即多边形中轴是与多边形不同边(或边的延长线)上的两个或两个以上点等距离的点的轨迹<sup>[4]</sup>(图2(c))。两点间的中轴是到两点距离相等点的轨迹,它是两点连线的垂直平分线。两线间的中轴是到两线距离相等点的轨迹,它在两线相交时为角平分线,两线平行时为到两线距离 $1/2$ 的平行线。一线和一点间的中轴是到该点、线距离相等点的轨迹,它是以前该点为焦点、该线为准线的抛物线<sup>[5]</sup>。

中轴是区域表达的一种有效方法,去除冗余信息,而保留区域图像的拓扑结构和几何信息,是平移、旋转和尺度的不变量,并且对小尺度噪声(空间不相关)、小尺度的模糊(与物体宽度比)以及小尺度的局部变形不敏感,因此,中轴图被广泛应用于科学和工程领域,包括地理信息系统、人脸识别、图像处理、计算机视觉和格网产生等<sup>[2]</sup>。

目前,有多种方法提取空间图形的中轴<sup>[6-16]</sup>,大致可以分为精确算法和逼近算法两类。一般来

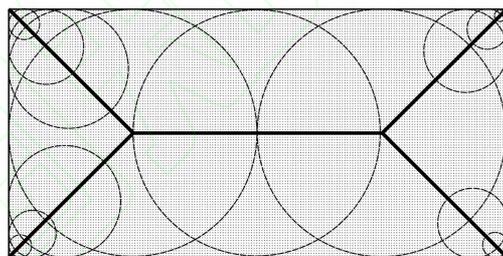


图1 矩形区域的中轴

Fig.1 Medial Axis of a Rectangle Shape

说,精确算法是较难实现的,在处理曲边多边形时存在算法不稳健、运算速度慢等问题<sup>[2]</sup>。一些精确方法是基于对研究几何对象的分解,首先将复杂的几何对象分解为简单几何对象,然后构建简单几何对象的中轴,最后通过融合各部分中轴合并为最终的总中轴。逼近算法主要包括 Voronoi 图方法<sup>[11-13]</sup>、Del aunay 三角网方法<sup>[17-18]</sup>和栅格方法<sup>[15,19-20]</sup>等。然而,这些算法均未考虑一个关键问题:"多边形的中轴是与多边形不同边(或边的延长线)上的两个或两个以上点等距离的点轨迹",这里的"多边形不同边"定义不同,会产生不同的中轴。图2表明,当将多边形边界上的边定义和标注为1、2、3、4等4条不同边时,得出的中轴是图2(a);当定义多边形边界上每条直线段都为不同边时,即存在15条不同边时,得到的中轴是图2(b),很明显,图2(a)-2(b)与正确的中轴

(图2(c))有很大差异。

基于多边形的中轴定义,本文提出了"多边形

不同边"的定义和标注方法,同时给出了构建复杂多边形中轴的矢量、栅格两种实用简便方法。

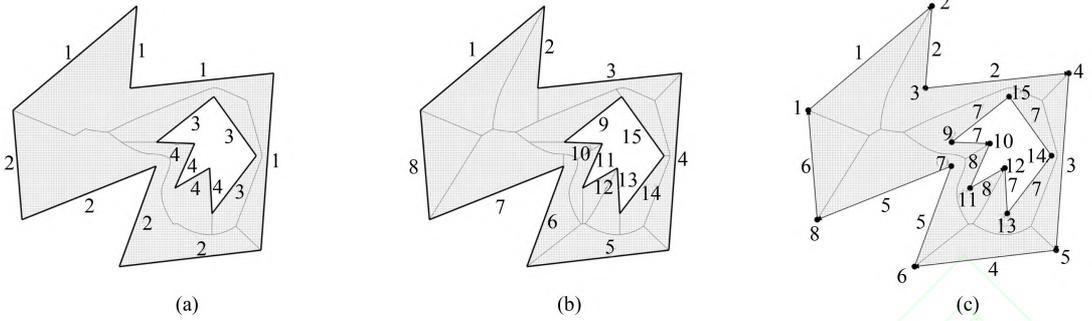


图2 基于不同边定义的中轴

Fig.2 Medial Axis Based on the Different Definitions of Polygon Boundary

## 1 多边形不同边定义和计算方法

图2(c)是一个复杂多边形区域的中轴,多边形顶点有凹凸性,含有岛屿多边形。多边形区域的中轴呈现一定的规律:多边形的外多边形凸顶点处存在中轴线、凹顶点处不存在中轴线(中轴线在多边形外面),相反,内多边形(岛屿多边形)凹顶点处存在中轴线、凸顶点处不存在中轴线。这表明在构建多边形中轴时需要多边形顶点进行凹凸性判断。

多边形顶点凹凸性判断算法主要有角度法、左右点法、矢量面积法、向量积法、射线法、斜率法和极点顺序法等<sup>[21]</sup>,这些算法本质上是等价的。本文采用左右点法来判断多边形顶点的凹凸性。图2(c)中,顶点③位于矢量线段①→②的右侧,则顺时针方向组成的①②③的面积为正,面积公式采用:

$$\text{Area} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (x_{i+1} - x_i)(y_{i+1} + y_i) \quad (1)$$

这时多边形顶点②属于凸顶点,而对于多边形顶点③而言,如果顶点④位于矢量线段②→③的左侧,则顺时针方向组成的②③④的面积为负,这时多边形顶点③属于凹顶点。如果三角形面积为0,则说明三点在一条直线上。岛屿多边形顶点的凹凸性也可以同样判断。

根据中轴定义,需要对组成多边形不同边界线段进行编号。存在中轴线的多边形凸顶点两侧线段赋不同的编号,不存在中轴线的多边形凹顶点两侧线段赋相同的编号。例如,顶点②为存在中轴线的凸顶点,两侧线段编号分别为1、2;而顶点③为不存在中轴线的凹顶点,两侧线段编号都是2,其他的依此类推。

## 2 复杂多边形中轴构建方法

目前尚缺乏成熟的构建复杂多边形中轴的方法和软件工具,本文给出了以下两种基于 ArcGIS 软件的方法。

### 2.1 基于 Voronoi 图的矢量方法

基于 Voronoi 图的构建多边形中轴线矢量方法的原理是,首先将复杂多边形边界线分解为点集,然后构建这些点集 Voronoi 图,Voronoi 图在多边形内的公共边即是多边形的中轴。下面是借助 ArcGIS 软件的实现方法:

1) 通过多边形顶点凹凸性判断得到多边形不同边界线段的编号(图3(a));

2) Arc Info Workstation 中采用 DENSIFYARC 命令给原始目标图层(图3(a))中多边形边界弧段上自动增加顶点(vertex), DENSIFYARC 命令格式是 DENSIFYARC <in\_cover> {out\_cover} <interval> {VERTEX | ARC}。顶点间隔(interval)设置得越小,增加顶点的数量越多,得出的中轴越能逼近精确中轴,间隔大小可以根据实际对中轴图的精度需要来确定,也取决于软件算法的设计极限。例如,在 ArcGIS Workstation 中,当点数量超过50 000 时,已经超出软件极限,不能顺利构建 Voronoi 图;

3) 对已增加顶点的图层进行拓扑关系运算(CLEAN 或 BUILD),以形成正确的弧段-节点拓扑关系;

4) Arc Info Workstation 中使用 ARCP0INT 命令将图层中弧段上的点(顶点、节点)转换到另一个仅含有点要素的图层中,ARCP0INT 命令格式是 ARCP0INT <in\_cover> <out\_point\_cover> {ALL | LINE} {spot\_item}

{weed\_tolerance},spot\_item 是通过多边形顶点凹凸性判断后得到的不同多边形边界线段编号(图3(b));

5) 使用 THIESSEN 命令构建点图层的 Voronoi 图(图3(c));

6) 用 DISSOLVE 命令对形成的 Voronoi 图进行融合,DISSOLVE 命令格式是 DISSOLVE <in\_cover> <out\_cover> <dissolve\_item |

#ALL > {POLY | LINE | NET | REGION.subclass}.dissolve\_item 即是 spot\_item,也就是多边形不同边界线段的编号,溶合即是属于同类型的 Voronoi 多边形的边进行溶合消除,不同类型的 Voronoi 多边形的边保留;

7) 使用原多边形图层切割(dip)溶合完的图层,得到的图层即是我们需要的近似中轴(图3(d))。

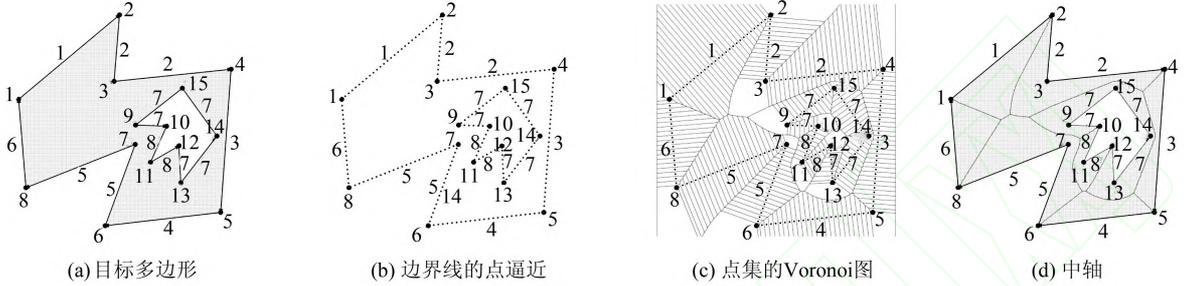


图3 基于 Voronoi 图方法的中轴构建

Fig.3 Medial Axis Constructing Based on the Method of Voronoi Diagram

### 2.2 基于区域分配的栅格方法

中轴构建可以通过在栅格空间中采用区域分配的方法来实现<sup>[20]</sup>。如图4所示,A<sub>1</sub>区域属于距离L<sub>1</sub>边最短距离点的集合,A<sub>1</sub>区域被分配给L<sub>1</sub>边;A<sub>2</sub>区域属于距离L<sub>2</sub>边最短距离点的集合,A<sub>2</sub>区域被分配给L<sub>2</sub>边。A<sub>1</sub>区域和A<sub>2</sub>区域

的分界线即是中轴线。下面是借助 ArcGIS 软件的方法。

1) 通过多边形顶点凹凸性判断得到多边形不同边界线段的编号(图5(a));

2) ArcInfo ArcMAP 中采用 ArcToolbox → Spatial Analyst Tools → Distance → Euclidean Allocation 对多边形不同编号的边界弧段进行区域分配(图5(b));

3) ArcInfo ArcMAP 中采用 ArcToolbox → Conversion Tools → From Raster → Raster To Polygon 将有关分配后的结果转换为矢量的多边形图层;

4) ArcInfo ArcMAP 中采用 ArcToolbox → Analysis Tools → Extract → Clip 对有关分配结果图层进行切割(必要时切割岛屿多边形),即得到目标多边形的近似中轴(图5(c)),完毕。

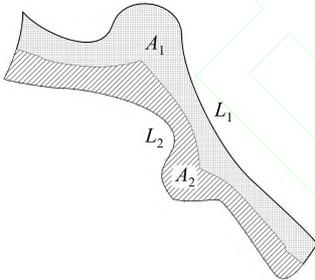


图4 中轴线示意图

Fig.4 Medial Axis of a Shape

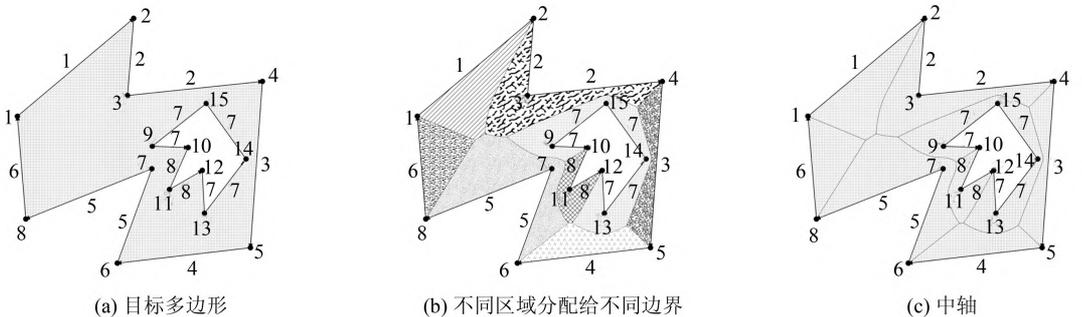


图5 基于区域分配方法的中轴构建

Fig.5 Medial Axis Constructing Based on the Method of Euclidean Distance Allocation

### 3 结 语

1) 通过对多边形中轴的结构分析, 本文提出了根据多边形顶点凹凸性判断来定义多边形不同边界线段的方法, 解决了中轴定义中“不同边”的定义、标注和计算方法问题。

2) 借助现有 ArcGIS 软件功能, 给出的两种方法都可以实现任意多边形中轴的构建(图6), 两种方法都是有效的、可行的。

3) 无论是基于 Voronoi 图的矢量方法还是基于区域分配的栅格方法, 都属于构建中轴的逼近方法或者近似方法。前者是将空间目标的边界线进行点集离散化处理; 后者是对空间目标的空

间域进行栅格离散化处理, 得到的中轴必然是近似的。

4) 本文提出的方法可以构建任意多边形的中轴, 但是对于曲边多边形或者自然图形, 由于数字曲边是由大量折线段表达的, 按照多边形中轴的定义, 如果曲边是凸边, 则存在众多凸顶点, 必然存在中轴线(图6(a))。一般来说, 只需要提取中轴主干, 这就要利用探索自动简化方法(图6(b)是人工简化后的中轴主干)。对于自然图形或者曲边图形, 需要对数字曲边的边进行定义, 而不是对组成曲边的折线段进行定义。可以依据曲边的特征点对曲边边界进行自动分割, 判断出凹凸边并分别进行标注等。

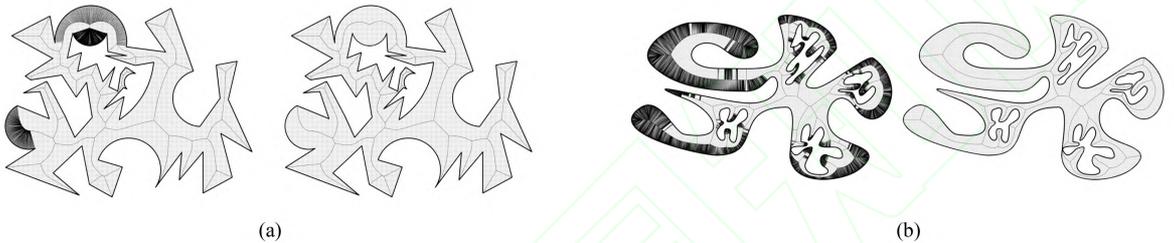


图6 复杂多边形的中轴

Fig.6 Medial Axis of Complex Polygons

### 参 考 文 献

- [1] Blum H. A Transformation for Extracting New Descriptors of Shape [M]. Cambridge: MIT Press, 1967:362-380
- [2] Smogavec G, Zalik B. A Fast Algorithm for Constructing Approximate Medial Axis of Polygons, Using Steiner Points [J]. Advances in Engineering Software, 2012, 52: 1-9
- [3] Cao Lixin, Liu Jian. Computation of Medial Axis and Offset Curves of Curved Boundaries in Planar Domain [J]. Computer-Aided Design, 2008, 40: 465-475
- [4] Zhou Peide, Zhou Zhongping. An Algorithm for Determining the Medial Axis of an Arbitrary Simple Polygon [J]. Journal of Beijing Institute of Technology, 2000, 20 (6): 708-711 (周培德, 周忠平. 确定任意多边形中轴的算法 [J]. 北京理工大学学报, 2000, 20 (6): 708-711)
- [5] Hu Peng, Wang Haijun, Shao Chunli, et al. Polygon Medial Axis Problem and the Algorithm [J]. Geomatics and Information Science of Wuhan University, 2005, 30 (10): 853-857 (胡鹏, 王海军, 邵春丽. 论多边形中轴问题和算法 [J]. 武汉大学学报·信息科学版, 2005, 30 (10): 853-857)
- [6] Aichholzer O, Aigner W, Aurenhammer F, et al. Medial Axis Computation for Planar Free-form Shapes [J]. Computer-Aided Design, 2009, 41: 339-349
- [7] Cao Lixin, Ba Wenlan, Liu Jian. Computation of the Medial Axis of Planar Domains Based on Saddle Point Programming [J]. Computer-Aided Design, 2011, 43: 979-988
- [8] Choi W P, Lam K M, Su W C. Extraction of the Euclidean Skeleton Based on a Connectivity Criterion [J]. Pattern Recognition, 2003, 36 (3): 721-729
- [9] Dorado R. Medial Axis of a Planar Region by Offset Self-intersections [J]. Computer-Aided Design, 2009, 41: 1 050-1 059
- [10] Culvera T, Keyser J, Manocha D. Exact Computation of the Medial Axis of a Polyhedron [J]. Computer Aided Geometric Design, 2004, 21: 65-98
- [11] Dey T K, Zhao Wulue. Approximate Medial Axis as a Voronoi Subcomplex [J]. Computer-Aided Design, 2004, 36: 195-202
- [12] Dey T K, Zhao Wulue. Approximating the Medial Axis from the Voronoi Diagram with a Convergence Guarantee [J]. Algorithmica, 2004, 38: 179-200
- [13] Fabril R, Estrozi L F, Costa L F. On Voronoi Diagrams and Medial Axes [J]. Journal of Mathemati-

- , 2002, 17: 27-40
- [14] Liu Lu, Chambers E W, Letscher D, et al. Extended Grassfire Transform on Medial Axes of 2D Shapes [J]. *Computer-Aided Design*, 2011, 43: 1496-1505
- [15] Ramanathan M, Gurumoorthy B. Constructing Medial Axis Transform of Planar Domains with Curved Boundaries [J]. *Computer-Aided Design*, 2002, 35: 619-632
- [16] Remya E, Thiel E. Exact Medial Axis with Euclidean Distance [J]. *Image and Vision Computing*, 2005, 23: 167-175
- [17] Ai Tinghua, Guo Renzhong. Extracting Centerlines and Building Street Network Based on Constrained Delaunay Triangulation [J]. *Acta Geodaetica et Cartographica Sinica*, 2000, 29(4): 348-354. (艾廷华, 郭仁忠. 基于约束 Delaunay 结构的街道中轴线提取及网络模型建立[J]. *测绘学报*, 2000, 29(4): 348-354.)
- [18] Chen Tao, Ai Tinghua. Automatic Extraction of Skeleton and Center of Area Feature [J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2004, 29(5): 443-446 (陈涛, 艾廷华. 多边形骨架线与形心自动搜寻算法研究[J]. *武汉大学学报·信息科学版*, 2004, 29(5): 443-446)
- [19] Pan Peng, He Sanwei, Wu Yanlan, et al. A New Method for Extracting Curved-polygon Medial Axis [J]. *Acta Geodaetica et Cartographica Sinica*, 2012, 41(2): 278-783 (潘鹏, 贺三维, 吴艳兰, 等. 曲边多边形中轴提取的新方法[J]. *测绘学报*, 2012, 41(2): 278-783)
- [20] Jiang Ling, Yang Xin, Tang Guoan. Research on Methods for Medial Axis Extraction Based on Euclidean Allocation [J]. *Bulletin of Surveying and Mapping*, 2011, 40(9): 21-24 (江岭, 杨昕, 汤国安. 基于欧氏区域分配的面状河流中轴线提取方法研究[J]. *测绘通报*, 2011, 40(9): 21-24)
- [21] Song Xiaomei, Cheng Changxiu, Zhou Chenghu. An Analysis and Investigation of Algorithms for Identifying Convex-Concavity of a Simple Polygon [J]. *Remote Sensing for Land Resources*, 2011, (3): 25-31 (宋晓眉, 程昌秀, 周成虎. 简单多边形顶点凹凸性判断算法综述[J]. *国土资源遥感*, 2011, 20(3): 25-31)

## Methods for Constructing Approximate Medial Axis for Planar Free-form Shapes

WANG Xinsheng<sup>1</sup> XIE Kai<sup>1</sup> JIANG Youhua<sup>2</sup> GUO Guangyi<sup>1</sup>

<sup>1</sup> School of Resources and Environmental Science, Hubei University, Wuhan 430062, China

<sup>2</sup> School of Civil and Architectural Engineering, Wuhan University, Wuhan 430072, China

**Abstract:** The medial axis (or a topological skeleton) is a thinner version of a geometric object, which is equidistant from the object's different edges. It can be seen from this definition that medial axis construction involves defining the "different edges" problem. Actually, the graph structure of polygon medial axis shows that there is a medial axis in polygon convex vertex, and no medial axis (outside the polygon) in a polygon concave vertex. In this paper, the left and right point method was adopted to judge if one vertex of a polygon is a concave vertex or not, and then the different boundary segments of such polygons were defined and labeled. With the aid of ArcGIS software, this paper presents two methods for constructing approximate a medial axis for planar free-form shapes: one is vector method based on the Voronoi diagram; another is raster method based on the regional distribution based on the Euclidean distance. Experimental results show that both methods are both effective and feasible.

**Key words:** complex polygon; medial axis; polygonal concave/convex vertices; Voronoi diagram; regional distribution

First author: WANG Xinsheng, PhD, professor, specializes in GIS, remote sensing application on agriculture and LUCC research. E-mail: wxs818@hubei.edu.cn

Foundation support: The National Natural Science Foundation of China, No. 41071240; the China Global Change Research Program, No. 2010CB950902.