

其中, $R_n(s)$ 为插值余项, 即牛顿插值的算法误差; $P(t_{k-n+s}, n)$ 为牛顿插值公式, 其表达式为:

$$P(t_{k-n+s}, n) = P(t_{k-n} + s\delta t, n) = \Delta^1 F_0 + \frac{s}{1!} \Delta^2 F_0 + \cdots + \frac{s(s-1) \cdots (s-n+2)}{n!} \Delta^n F_0$$

(2)

其中, $\nabla^m F_0 = \sum_{j=0}^{m-1} (-1)^{m-1-j} C_{m-1}^j f_{k-n+j}$ 为插值算子。

令 $s=n$, 即利用前 n 个时刻的函数值对当前时刻的函数值进行插值, k 时刻函数 f 的牛顿插值为:

$$f_k = P(t_{k-n+s}, n) = \mathbf{J} \cdot \mathbf{f}_{(k-n; k-1)} = \sum_{i=1}^n J_{n-i+1} f_{k-i}$$

(3)

其中, $J_g = \sum_{i=g-1}^{n-1} (-1)^{i-g+1} C_{n-1}^{g-1} C_n^i$; $\mathbf{f}_{(k-n; k-1)} = [f_{(k-n)} \quad f_{(k-n+1)} \quad \cdots \quad f_{(k-1)}]^T$ 为前 n 个时刻的函数值; $\mathbf{J} = [J_1 \quad J_2 \quad \cdots \quad J_n]$ 为前 n 个时刻函数值的插值算法系数。

牛顿向后插值的系数矩阵 \mathbf{J} 和前 n 个时刻的函数值没有关系, 只和系数的位置有关, 因此, 在等间距插值过程中可以提前计算系数矩阵 \mathbf{J} 。表 1 是 $1 \leq n \leq 5$ 的系数矩阵 \mathbf{J} 的值^[7]。

表 1 系数矩阵 \mathbf{J}
Tab. 1 Matrix of Coefficient \mathbf{J}

	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$
J_1	1	-1	1	-1	1
J_2	-	2	-3	4	-5
J_3	-	-	3	-6	10
J_4	-	-	-	4	-10
J_5	-	-	-	-	5

在插值计算过程中, 并不是插值多项式的次数越高, 精度越好。当次数较高时, 数值常常不稳定^[8], 而且会增加算法的复杂度, 因此, 建模过程中需要对不同的建模阶数对比优化。

1.2 惯性系统模型

惯性系统包括加速度计和陀螺仪, 由于两者的误差特点较为复杂, 所以, 在 GPS/INS 组合导航系统中, 通常将加速度计和陀螺仪的误差认为是高斯白噪声, 或者认为两者的误差近似满足 Gauss-Markov 过程, 即将 k 时刻的加速度计和陀螺仪状态误差和 $k-1$ 时刻的状态误差相联系。但是在实际情况中, k 时刻的状态误差可能和之前的多个时刻的状态误差有关系, 因此, 借助牛顿等距插值对加速度计和陀螺仪误差的 Gauss-

Markov 过程进行改进。以陀螺仪误差为例, 传统的 Gauss-Markov 过程为:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} -\tau_{\omega X} & 0 & 0 \\ 0 & -\tau_{\omega Y} & 0 \\ 0 & 0 & -\tau_{\omega Z} \end{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{u}_{\boldsymbol{\varepsilon}} = \boldsymbol{\beta}_{\boldsymbol{\varepsilon}} \boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{u}$$

(4)

其中, $\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_{\omega X} \quad \varepsilon_{\omega Y} \quad \varepsilon_{\omega Z}]^T$ 为 INS 陀螺仪 X 、 Y 、 Z 三轴误差; $(\tau_{\omega X} \quad \tau_{\omega Y} \quad \tau_{\omega Z})$ 为陀螺仪误差 Gauss-Markov 过程时间常数。

对微分方程离散化, 只保留一阶项, 即

$$\boldsymbol{\varepsilon}_k = (\mathbf{I} + \boldsymbol{\beta}) \boldsymbol{\varepsilon}_{k-1} + \mathbf{u}$$

(5)

从式(5)可以看出, k 时刻的陀螺仪状态误差和 $k-1$ 时刻的状态误差相联系, 而忽略了之前时刻的状态值, 对式(4)引入牛顿等距插值算法, 建立陀螺仪误差动力学模型:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \approx \sum_{i=1}^n J_{n-i+1} \boldsymbol{\beta}_{\boldsymbol{\varepsilon}} \boldsymbol{\varepsilon}_{k-i} + \mathbf{u}_{\boldsymbol{\varepsilon}}$$

(6)

式(6)左右两边分别为连续过程和离散过程, 所以用约等于进行连接。当 n 取值不同时, 可利用当前时刻之前的多个状态值进行建模, 式(6)用离散化公式表示为:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = (\mathbf{I} + J_n \boldsymbol{\beta}_{\boldsymbol{\varepsilon}}) \boldsymbol{\varepsilon}_{k-1} + \sum_{i=2}^n J_{n-i+1} \boldsymbol{\beta}_{\boldsymbol{\varepsilon}} \boldsymbol{\varepsilon}_{k-i} + \mathbf{u}_{\boldsymbol{\varepsilon}}$$

(7)

结合表 1, 从式(7)中可以看出, 当 $n=1$ 时, 引入牛顿插值的系统模型和 Gauss-Markov 过程是等价的; 当 $n>1$ 时, 新建模型将 k 时刻的状态值和 $k-1$ 、 $k-2$ 、 \cdots 、 $k-n$ 时刻的状态值相联系, 一方面, 增加了多时刻的动力学模型, 使模型的可靠性更高, 除此之外, 对当前时刻的状态值起到了平滑作用, 降低了误差的影响作用。

2 GPS/INS 组合导航模型

2.1 动力学模型

GPS/INS 组合导航动力学模型的构建基于 INS 误差方程^[9]:

$$\begin{aligned} \dot{\delta \mathbf{r}} &= -\boldsymbol{\omega}_{en} \times \delta \mathbf{r} + \delta \mathbf{v} \\ \delta \dot{\mathbf{v}} &= -(\boldsymbol{\omega}_e + \boldsymbol{\omega}_m) \times \delta \mathbf{v} - \delta \boldsymbol{\psi} \times \mathbf{f} + \nabla \\ \delta \dot{\boldsymbol{\psi}} &= -\boldsymbol{\omega}_m \times \delta \boldsymbol{\psi} + \boldsymbol{\varepsilon} \end{aligned}$$

(8)

其中, $\delta \mathbf{r}$ 、 $\delta \mathbf{v}$ 和 $\delta \boldsymbol{\psi}$ 分别是位置、速度和方向误差向量; $\boldsymbol{\omega}_{en}$ 是导航坐标系相对于地球坐标系的旋转角速度矢量; $\boldsymbol{\omega}_e$ 是地理坐标系相对于惯性坐标系的旋转角速度矢量; $\boldsymbol{\omega}_m$ 是导航坐标系相对于惯性坐标系的旋转角速度矢量; \mathbf{f} 加速度计测量的比力矢量; 加速度误差向量 ∇ 和陀螺误差向量 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 模型表达式为:

$$\dot{\nabla} = \sum_{i=1}^n J_{n-i+1} \beta_{\nabla} \nabla_{k-i} + u_{\nabla} \tag{9}$$

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \sum_{i=1}^n J_{n-i+1} \beta_{\boldsymbol{\varepsilon}} \boldsymbol{\varepsilon}_{k-i} + u_{\boldsymbol{\varepsilon}} \tag{10}$$

其中, u_{∇} 和 $u_{\boldsymbol{\varepsilon}}$ 是高斯白噪声向量。

综合以上各式,INS 误差转移方程表达式为^[10]:

$$\begin{cases} \delta \dot{\boldsymbol{r}} = -\boldsymbol{\omega}_m \times \delta \boldsymbol{r} + \delta \boldsymbol{v} \\ \delta \dot{\boldsymbol{v}} = -(\boldsymbol{\omega}_e + \boldsymbol{\omega}_m) \times \delta \boldsymbol{v} - \delta \boldsymbol{\psi} \times \boldsymbol{f} + \nabla \\ \delta \dot{\boldsymbol{\psi}} = -\boldsymbol{\omega}_m \times \delta \boldsymbol{\psi} + \boldsymbol{\varepsilon} \\ \dot{\nabla} = \sum_{i=1}^n J_{n-i+1} \beta_{\nabla} \nabla_{k-i} + u_{\nabla} \\ \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \sum_{i=1}^n J_{n-i+1} \beta_{\boldsymbol{\varepsilon}} \boldsymbol{\varepsilon}_{k-i} + u_{\boldsymbol{\varepsilon}} \end{cases} \tag{11}$$

写成矩阵形式为:

$$\dot{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{F}\boldsymbol{X} + \boldsymbol{u} \tag{12}$$

其中, \boldsymbol{X} 为误差状态向量, $\boldsymbol{X} = [\delta \boldsymbol{r} \ \delta \boldsymbol{v} \ \delta \boldsymbol{\psi} \ \nabla \ \boldsymbol{\varepsilon}]^T$; \boldsymbol{F} 为系统状态转移矩阵; \boldsymbol{u} 为状态过程噪声向量。可以看出,当加速度计和陀螺仪误差牛顿插值建模选取的项数不同时,状态向量 \boldsymbol{X} 中的 ∇ 和 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 的阶数也随之不同。

2.2 观测模型

组合导航数据融合采用松耦合方式,取 GPS 和 INS 输出的位置和速度之差作为观测值,构造观测量^[11-12]:

$$\begin{aligned} Z_r(t) &= r_{\text{GPS}}(t) - r_{\text{INS}}(t) = r_{\text{GPS}}(t) - \\ & (r_{\text{INS}}(0) + \int_0^t v_{\text{INS}}(0) dt + \int_0^t \int_0^t \alpha(t) dt) \end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned} Z_v(t) &= v_{\text{GPS}}(t) - v_{\text{INS}}(t) = \\ & v_{\text{GPS}}(t) - (v_{\text{INS}}(0) + \int_0^t \alpha(t) dt) \end{aligned} \tag{14}$$

式中, $Z_r(t)$ 是位置观测量; $Z_v(t)$ 是速度观测量; $r_{\text{GPS}}(t)$ 是 GPS 的位置观测值; $r_{\text{INS}}(t)$ 是 INS 的位置计算值; $v_{\text{GPS}}(t)$ 是 GPS 的速度观测值; $v_{\text{INS}}(t)$ 是 INS 的速度计算值; $r_{\text{INS}}(0)$ 、 $v_{\text{INS}}(0)$ 是 INS 的初始位置和速度; $\alpha(t)$ 是 INS 所测得的加速度。则 Kalman 的量测方程为^[13]:

$$\boldsymbol{Z}_k = \begin{bmatrix} Z_r(t) \\ Z_v(t) \end{bmatrix} = \boldsymbol{B}_k \boldsymbol{X} + \begin{bmatrix} \nu_r \\ \nu_v \end{bmatrix} \tag{15}$$

式中, \boldsymbol{B}_k 为观测矩阵; ν 为观测噪声,满足高斯白噪声特性。

3 实例分析

为对 Gauss-Markov 模型和引入牛顿插值的新建模型进行比较,并验证加速度计和陀螺仪不同建模阶数对 GPS/INS 组合导航的影响,本文

进行了车载实测实验。实验区域位于中国矿业大学南湖校区和云龙湖景区(见图 1)。实验采用 2 台 LAICA-GPS 接收机和 1 台惯性测量系统,1 台 GPS 接收机作为静止参考基站,另 1 台 GPS 接收机和惯性测量系统一起安置在运动车辆内(GPS 天线安装在车顶)。实验采用 SPAN-CPT 惯性测量单元,表 1 是惯性测量单元性能参数。INS 数据采集频率为 100 Hz,GPS 数据采样周期为 1 s。采用 GPS 的位置和速度观测值进行组合导航时,初始方差取 10 m² 和 0.01 m²/s²。

表 2 SPAN-CPT 技术参数

Tab. 2 SPAN-CPT's Technical Data

	陀螺	加速度计
偏心	20 °/h	4×10 ⁻³
尺度因子	1 500×10 ⁻⁶	800×10 ⁻⁶
随机游走	0.035 °/√h	60×10 ⁻³ g/√Hz

为了说明引入牛顿插值的新建模型的有效性,分别采用 4 种方案进行导航解算。

① 方案 1,惯性(加速度计和陀螺仪)误差状态量动力学模型采用 Gauss-Markov 建模;② 方案 2,惯性误差状态量动力学模型采用二阶牛顿插值建模;③ 方案 3,惯性误差状态量动力学模型采用 4 阶牛顿插值建模;④ 方案 4,惯性误差状态量动力学模型采用 5 阶牛顿插值建模。



图 1 车辆测试轨迹

Fig. 1 Vehicular Test trajectory

图 2(a)~2(c)为 4 种解算方案在 N、E、D 三个方向的误差序列图,由于位置误差较小,从经纬度误差角度不便于观察,因此,把位置误差转换到 N、E、D 坐标系中,其中,两台接收机解算的 RTK 值作为参考值。解算初始阶段,误差序列图呈现振荡趋势,是由于初始参数的选取没有达到最优造成的。从整个实验过程来看,方案 2~4 采用牛顿插值的惯性误差状态量动力学模型建模,导航结果要优于采用 Gauss-Markov 建模的方案 1,采用高阶(4 阶和 5 阶)牛顿插值建模方案的导航精度优于低阶(二阶)牛顿插值建模方案。

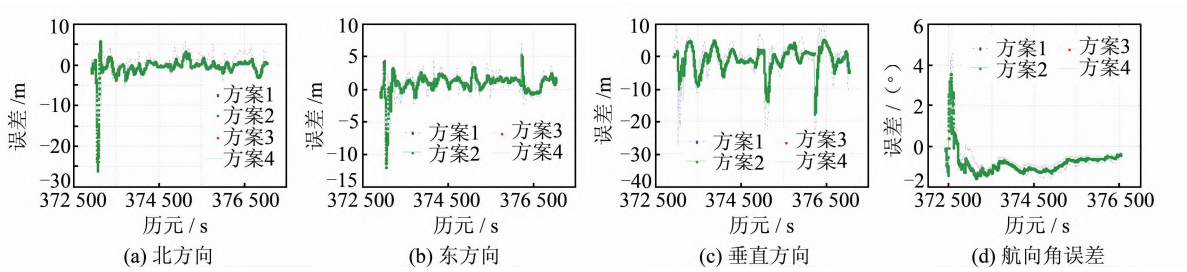


图 2 方向误差与航向角误差

Fig. 2 Direction and Heading Angle Errors of Different Schemes

图 2(d)给出了 4 种解算方案下航向角误差,可以看出,采用牛顿插值的惯性误差状态量动力学模型建模不但提高直接可测参数的精度,而且提高了间接可测参数(航向角)的估计精度,从均方差角度分析,相对于方案 1(1.157°),方案 2、方案 3 和方案 4 的 RMS 误差降低至 0.974° 、 0.867° 和 0.862° 。

4 种方案的详细导航精度评价结果列见表 3。对比表 3 中 4 种方案在 N、E、D 三个方向的精度可知,通过牛顿插值建模的方法提高了组合导航精度,说明基于牛顿插值所建的动力学模型更加精确。与此同时,当将牛顿插值建模的阶数从二阶提高到 4 阶,组合导航精度也随之提高。但是,将 4 阶牛顿插值建模提高到 5 阶,组合导航精度提高不明显,部分方向导航精度还略有下降,说明采用牛顿插值建模的方法建立动力学模型时,建模阶数越多并不一定会获得越优的结果。当建模阶数达到 4 阶之后,继续提高牛顿插值建模阶数不能有效提高导航精度,反而会增加算法的复杂性,因此,组合导航动力学模型采用牛顿插值建模时选取 4 阶建模较为合适。

表 3 位置精度比较/m

Tab. 3 Position Precision Comparison/m

RMS	N	E	D
方案 1	2.117	1.684	5.945
方案 2	1.179	1.438	3.921
方案 3	1.142	1.514	3.838
方案 4	1.139	1.518	3.843

4 结 语

本文分析了惯性系统中陀螺和加速度计的模型特点,在原有 Gauss-Markov 过程的基础上引入了牛顿插值算法,建立了更加准确的 GPS/INS 组合导航高阶动力学模型,通过车载实验对牛顿插值高阶建模方法进行了优化,验证了建模阶数和导航精度之间的关系。基于牛顿插值的 GPS/

INS 组合导航惯性动力学模型构建方法在不大幅增加模型复杂度的基础上,对惯性系统模型进行了更加准确的数学描述。车载实验证明,与 Gauss-Markov 模型相比,本文算法能够有效提高导航过程位置和姿态信息的精度,在建模阶数选取较小(4 阶)的情况下即可获取较好的导航效果。

参 考 文 献

[1] Hasan A M, Samsudin K, Ramli A R, et al. A Review of Navigation Systems (Integration and Algorithms)[J]. *Australian Journal of Basic and Applied Sciences*, 2009, 3(2): 943-959

[2] Yan Wei, Ou Jikun, Yuan Yunbin, et al. Research on Network Augmented Real-Time Precise Point Positioning Algorithm with Broadcast Ephemeris [J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2012, 37(10): 1 190-1 193(闫伟, 欧吉坤, 袁运斌, 等. 利用广播星历和区域参考网实现实时精密单点定位算法研究[J]. 武汉大学学报·信息科学版, 2012, 37(10): 1 190-1 193)

[3] Antonio A, Mark P, Giovanni P. Benefits of Combined GPS/GLONASS with Low-Cost MEMS IMUs for Vehicular Urban Navigation[J]. *Sensors*, 2012, 12(4): 5 134-5 158

[4] Minha P. Error Analysis and Stochastic Modeling of MEMS based Inertial Sensors for Land Vehicle Navigation Applications[D]. Calgary: The University of Calgary, 2004

[5] Niu Zhongxing, Xie Yi, Wen Guochun. Modeling Method of Error Models for Integrated Navigation System[J]. *Journal of Projectiles, Rockets, Missiles and Guidance*, 2006, 26(SA): 1 101-1 103(牛中兴, 谢轶, 文国春. 组合导航系统误差模型建模方法研究[J]. 弹箭与制导学报, 2006, 26(SA): 1 101-1 103)

[6] Zebo Z, Bofeng L, Yunzhong S. A Window-Recur-sive Approach for GNSS Kinematic Navigation Using Pseudorange and Doppler Measurements[J].

The Journal of Navigation, 2013, 66(2): 1-19

[7] Gong Manman, Chen Qian, Gu Guohua, et al. FP-GA-Based Realization of Second-Order Newton Interpolation of Infrared Image[J]. *Infrared Technology*, 2010, 32(12): 723-726(龚曼曼, 陈钱, 顾国华, 等. 基于 FPGA 的红外图像二阶牛顿插值算法的实现[J]. 红外技术, 2010, 32(12): 723-726)

[8] Zebo Z, Yunzhong S, Bofeng L. A Windowing-recursive Approach for GPS Real-Time Kinematic Positioning[J]. *GPS Solution*, 2010, 14(4): 365-373

[9] Titterton D H, Weston J L. Strapdown Inertial Navigation Technology(Second Edition)[M]. Bodmin: MPG Books Ltd., 2004

[10] Songlai H, Jinling W. Integrated GPS/INS Navigation System with Dual-Rate Kalman Filter[J]. *GPS Solution*, 2012, 16(3):389-404

[11] Li Zengke, Wang Jian, Gao Jingxiang. The Apply of Precise Point Positioning in GPS/INS Integrated Navigation[J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2013, 38(1): 48-51(李增科, 王坚, 高井祥. 精密单点定位在 GPS/INS 组合导航中的应用[J]. 武汉大学学报·信息科学版, 2013, 38(1): 48-51)

[12] Wu Fumei, Nie Jianliang, He Zhengbin. Classified Adaptive Filtering to GPS/INS Integrated Navigation Based on Predicted Residual and Selecting weight Filtering [J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2012, 37(3): 261-264(吴富梅, 聂建亮, 何正斌. 利用预测残差和选权滤波构造的分类因子在 GPS/INS 组合导航中的应用[J]. 武汉大学学报·信息科学版, 2012, 37(3): 261-264)

[13] Antonio A. GNSS/INS Integration Methods [D]. Calgary: The University of Calgary, 2010

Inertial Dynamic Model of GPS/INS Integrated Navigation
Based on Newton Interpolation

LI Zengke¹ GAO Jingxiang² WANG Jian¹ HU Hong²

1 Key Laboratory for Land Environment and Disaster Monitoring of SBSM,
China University of Mining and Technology, Xuzhou 221116, China

2 Jiangsu Key Laboratory of Resources and Environmental Information Engineering,
China University of Mining and Technology, Xuzhou 221116, China

Abstract: In GPS/INS integrated navigation, the low precision of the INS dynamic model reduces navigation accuracy. Based on Newton interpolation, a multi-order dynamic model algorithm for GPS/INS integrated navigation is proposed. First, the detail algorithm of Newton interpolation is introduced. Based on this a Gauss-Markov model of the inertial system is modified to realize the multi-order model. The design formulas of the observation and dynamical models are presented. Finally, an actual calculation was performed to test the validity of new algorithm. The results of the experiment indicate that when compared with the Gauss-Markov model, the inertial dynamic model for GPS/INS integrated navigation based on Newton interpolation can improve the position and attitude precision effectively. At the same time, an analysis of the experiment shows that a 4-order Newton interpolation model not only enhances model precision, but also reduces model complexity, which provides a good reference for order selection in the Newton interpolation model.

Key words: GPS/INS integrated navigation; Newton interpolation; dynamic model; Gauss-Markov process

First author: LI Zengke, PhD candidate, specializes in the GPS/INS integrated navigation. E-mail: zengkeli@yeah.net

Foundation support: The National 863 Program of China, No. 2013AA12A201; the National Natural Science Foundation of China, No. 41074010; the Priority Academic Program Development of Jiangsu Higher Education Institutions, No. SZBF2011-6-B35; the Graduate Student Research and Innovation Program in Jiangsu Province, No. CXZZ12_0939.