DOI:10.13203/j.whugis20120104 文章编号:1671-8860(2014)05-0571-04

# 空间直线拟合的整体最小二乘算法

姚宜斌[1] 黄书华[1] 孔 建[1,2] 何军泉[3]

1 武汉大学测绘学院,湖北 武汉,430079
2 俄亥俄州立大学地球科学学院,美国哥伦布,43210
3 温州市勘察测绘研究院,浙江 温州,325000

**摘 要**:提出了一种基于整体最小二乘的空间直线拟合方法。首先,对空间直线的标准式方程进行变换,并附加参数转换的过程,将6个参数简化为4个;然后,将方程改写为矩阵形式,由此巧妙地将空间直线拟合的问题转化为整体最小二乘的参数求解问题,利用TLS迭代法求得转换后的空间直线拟合的4个参数,再通过参数回代的方法恢复空间直线的6个基本参数。通过算例比较验证了该方法的可行性和有效性。

**关键词**:空间直线;整体最小二乘;SVD;拟合

**中图法分类号**:P207.2 **文献标志码**:A

对二维平面上的一组点 $p_i(x_i, y_i)$ 进行直线拟合,可利用二维直线方程 $y=ax+b$ 直接采用最小二乘(least squares,LS)方法或整体最小二乘(total least squares,TLS)方法进行拟合。但对于三维空间直线的拟合,不能像平面直线拟合那样直接采用LS法或TLS法[1],这主要是因为三维直线的方程式 $\frac{x-x_0}{A}=\frac{y-y_0}{B}=\frac{z-z_0}{C}$ 是一个具有6个参量的连等式,并不是简单的线性关系。然而在一些大型构件的实际测量数据处理中,经常会碰到空间直线拟合的问题[2]。

TLS法在平面直线拟合中的应用已经十分广泛,一般直接采用SVD法[3]或者迭代法[4]对建立的系数矩阵含有误差(error-in-variable,EIV)模型进行参数求解,但是,针对空间直线拟合的TLS法并不多见。目前常用的空间直线拟合的方法有:① 以牛顿-梯度最优化算法为代表的迭代算法[5],该算法是以两点为初始值,通过逐步迭代的方法达到所给的精度要求,其涉及大量方程组的求解,求解过程较为繁琐,实用性不佳;② 无迭代算法[2],该方法实质是求出与测量点组距离之和最小的平面,然后将三维问题转化为二维问题,在平面上利用最小二乘的方法进行直线拟合。该方法只顾及到了 $x_i$ 和 $y_i$ 方向的误差,忽略了 $z_i$ 方向的误差,在理论上并上不严密。

本文通过对空间直线的标准式方程进行变换,巧妙地将标准式方程变换成了EIV模型,这样,就可以采用TLS法求解参数。采用TLS法可以同时顾及到 $x_i$、$y_i$ 和 $z_i$ 三个方向的测量误差,这将更加符合实际情况。此模型的系数矩阵并不是所有的元素都含有误差,对现有的两种求解EIV模型的方法进行比较,最后采用迭代法对此模型进行参数求解。

## 1 算法推导

### 1.1 空间直线标准方程转化为EIV模型

空间直线的标准式方程为:

$$\frac{x-x_0}{A}=\frac{y-y_0}{B}=\frac{z-z_0}{C} \tag{1}$$

可变形为:

$$\begin{cases} x=\frac{A}{C}(z-z_0)+x_0 \\ y=\frac{B}{C}(z-z_0)+y_0 \end{cases} \tag{2}$$

设 $a=\frac{A}{C}$、$b=x_0-\frac{A}{C}z_0$、$c=\frac{B}{C}$、$d=y_0-\frac{B}{C}z_0$,则空间直线方程(1)可写为:

$$\begin{cases} x=az+b \\ y=cz+d \end{cases} \tag{3}$$

**收稿日期**:2013-02-26

**项目来源**:国家自然科学基金资助项目(41174012,41274022);国家863计划资助项目(2013AA122502);教育部新世纪优秀人才支持计划资助项目(NCET-12-0428)。

**第一作者**:姚宜斌,教授,博士生导师,现主要从事测量数据处理基础理论与方法研究。E-mail:ybyao@whu.edu.cn

写成矩阵形式可表示为：

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & z \end{bmatrix} [a \quad b \quad c \quad d]^{\mathrm{T}} \tag{4}$$

将式(4)改写成误差方程的形式可表示为：

$$\boldsymbol{V} = \begin{bmatrix} z & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & z \end{bmatrix} [\hat{a} \quad \hat{b} \quad \hat{c} \quad \hat{d}]^{\mathrm{T}} - \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \tag{5}$$

令 $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} z & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & z \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{L} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$，$\hat{\boldsymbol{X}} = [\hat{a} \quad \hat{b} \quad \hat{c} \quad \hat{d}]^{\mathrm{T}}$，则式(5)就简化为 $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{B}\hat{\boldsymbol{X}} - \boldsymbol{L}$ 的形式。考虑到实测数据点坐标在 $x$、$y$、$z$ 三个方向上都存在误差，式(5)的设计矩阵 $\boldsymbol{B}$ 中含有观测值 $z$，其也含有随机误差，由此构成了一个典型的 EIV 模型，此时继续采用经典最小二乘原理进行求解是不合理的，可以采用 TLS 方法进行参数求解。

假设有空间直线的一组实测数据为 $p_i(x_i, y_i, z_i)$，需要由这组点拟合出空间直线的参数，相应的误差方程可以按照式(5)表示出来，其中 $\hat{\boldsymbol{X}} = [\hat{a} \quad \hat{b} \quad \hat{c} \quad \hat{d}]^{\mathrm{T}}$，

$$\boldsymbol{L} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ \vdots \\ x_n \\ y_n \end{bmatrix}, \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} z_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & z_1 \\ \vdots & & & \vdots \\ z_n & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & z_n \end{bmatrix}$$

，求解出参数向量 $\hat{\boldsymbol{X}}$ 也就确定了空间直线的方程。

由此可见，经过对空间直线标准方程式的变化以及参数的转化，就将求解空间直线 6 个参数的问题转变为设计矩阵含有误差的 EIV 模型的求解，然后，将采用 TLS 方法求出的 4 个参数 $\hat{a}$、$\hat{b}$、$\hat{c}$、$\hat{d}$ 恢复出空间直线方程式中的 6 个参数，从而得到空间直线的标准方程式。

## 1.2 TLS 求解 EIV 模型参数

TLS 是同时顾及观测值和系数矩阵误差的一种平差方法。这种方法与经典最小二乘相比，理论上更加严密，参数估值是统计最优解，但参数的求解以及精度的评定变得更为复杂。针对这一问题，文献[6]了提出了 TLS 的 SVD 解法，该算法的提出首次解决了 TLS 的解算问题。TLS 的另一种解法是迭代法[5]，该算法最大的特点就是算法简单，易于编程实现。

### 1.2.1 TLS 的 SVD 解法

对于模型

$$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi} \tag{6}$$

同时顾及观测向量 $\boldsymbol{b}$ 的误差 $\Delta\boldsymbol{b}$、系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的误差 $\Delta\boldsymbol{A}$，则式(6)可写成：

$$\underset{n\times1}{\boldsymbol{b}} - \underset{n\times1}{\Delta\boldsymbol{b}} = (\underset{n\times t}{\boldsymbol{A}} - \underset{n\times t}{\Delta A})\underset{t\times1}{\boldsymbol{\xi}} \tag{7}$$

在以 $\|[\hat{\boldsymbol{A}};\hat{\boldsymbol{b}}] - [\boldsymbol{A};\boldsymbol{b}]\|_2 = \min$ 为平差准则的情况下，对矩阵 $[\boldsymbol{A};\boldsymbol{b}]$ 进行 SVD 分解，可以求得 $\hat{\boldsymbol{\xi}}$ 的解为[6]：

$$\hat{\boldsymbol{\xi}} = -\frac{1}{v_{t+1,t+1}} [v_{1,t+1} \quad v_{2,t+1} \quad \cdots \quad v_{t,t+1}]^{\mathrm{T}} \tag{8}$$

式中，$v_{i,t+1}$ 表示 SVD 分解右奇异阵的最后一列元素；$n$ 表示观测值个数；$t$ 表示待求参数的个数。

由上述的解算过程可以发现，SVD 解法是直接对矩阵 $[\boldsymbol{A};\boldsymbol{b}]$ 进行的，即认为矩阵 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{b}$ 中所有元素均含有误差，这种不加区分的作最小范数约束的做法，显然是不严密的。如系数矩阵 $\boldsymbol{B}$，其中有误差的项只是其中的元素 $z_i$，并不是所有元素，这种情况下不宜采用 SVD 法进行求解[7]。因此，在利用 TLS 进行空间直线拟合时，不能采用 SVD 法来进行参数的求解，本文将采用迭代法来解算空间直线拟合所构成的误差方程。

### 1.2.2 TLS 的迭代解法

该方法是在满足式(5)的基础上引入平差准则：

$$\sum_{i=1}^{n} (\hat{L}_i - L_i)^2 + \sum_{j=1,i=1}^{j=t,i=n} (\hat{B}_{ij} - B_{ij})^2 = \min \tag{9}$$

将式(5)代入上式后对矩阵 $\boldsymbol{B}$ 和参数向量 $\boldsymbol{X}$ 中的各个元素求导，通过把方程式分为两类的办法得到迭代方程式：

$$\hat{\boldsymbol{B}}^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{B}}\hat{\boldsymbol{X}} = \hat{\boldsymbol{B}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L} \tag{10}$$

$$\boldsymbol{N}_b\hat{\boldsymbol{B}}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} + \hat{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}} \tag{11}$$

其中，$\boldsymbol{N}_b = \boldsymbol{E} + \hat{\boldsymbol{X}}\hat{\boldsymbol{X}}^{\mathrm{T}}$。迭代法的具体解算步骤可概括为：

1) 获取未知参数的初值 $\boldsymbol{X}^0$；

2) 根据观测值信息以及未知参数初值 $\boldsymbol{X}^0$，取 $\hat{\boldsymbol{B}}(0) = \boldsymbol{B}$，由式(10)求取未知参数的平差值 $\hat{\boldsymbol{X}}^{(1)}$；

3) 由 $\boldsymbol{N}_b = \boldsymbol{E} + \hat{\boldsymbol{X}}\hat{\boldsymbol{X}}^{\mathrm{T}}$ 可以求得 $\boldsymbol{N}_b^{(1)} = \boldsymbol{E} + \hat{\boldsymbol{X}}(1)\hat{\boldsymbol{X}}(1)^{\mathrm{T}}$；

4) 根据求得的 $\boldsymbol{N}_b^{(1)}$、未知参数的平差值和观测值信息，由式(11)求取设计矩阵平差值 $\hat{\boldsymbol{B}}^{(1)}$；

5) 重复步骤 2)～4)，直到两次计算的参数值之差小于一定的阈值，退出迭代，输出结果。

## 1.3 空间直线拟合精度的评定

对于空间直线的拟合，可以利用空间各点 $\boldsymbol{p}_i(x_i, y_i, z_i)$ 到拟合直线的距离总和 $\sum\Delta_i$ 和直线度来进行精度评定[8]。

假设拟合的空间直线方程式为：

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \tag{12}$$

则有：

$$\Delta_i = (|(A_1x_i + B_1y_i + C_1z_i + D_1)\boldsymbol{n}_2 - (A_2x_i + B_2y_i + C_2z_i + D_2)\boldsymbol{n}_1|)/|\boldsymbol{n}_1 \times \boldsymbol{n}_2| \tag{13}$$

$$直线度 = \max(\Delta_i) - \min(\Delta_j) \tag{14}$$

其中,$\Delta_i$ 表示空间一点 $p_i$ 到拟合直线的距离;$\boldsymbol{n}_i = (A_i, B_i, C_i)$ $(i=1,2)$。

## 2　实例分析

表 1 为空间直线的一组实测数据[8],已知其中含有的模型误差为 $\delta = \pm 0.005$。

**表 1　空间直线实测样本数据**

Tab. 1　Measured Sample Data of Spatial Straight Line

| $x$ | $y$ | $z$ | $\Delta_i$ |
|---|---|---|---|
| 3.003 6 | 2.996 0 | 3.004 1 | 0.002 4 |
| 4.003 4 | 4.998 0 | 6.003 3 | 0.000 8 |
| 5.005 0 | 6.999 2 | 9.005 0 | 0.002 0 |
| 5.996 4 | 9.003 6 | 11.996 2 | 0.008 1 |
| 7.003 2 | 10.996 8 | 15.002 4 | 0.002 8 |
| 8.003 8 | 13.000 1 | 18.004 5 | 0.002 0 |
| 9.001 0 | 15.004 0 | 20.999 6 | 0.004 2 |
| 9.997 2 | 16.999 3 | 23.998 2 | 0.002 2 |
| 11.001 1 | 18.996 2 | 27.000 1 | 0.003 4 |
| 11.999 7 | 20.998 0 | 29.997 8 | 0.001 1 |

按照 TLS 迭代法的步骤,通过编制相应的计算程序对表 1 中的数据进行空间直线拟合,求得 $\hat{a}=0.333\,248$、$\hat{b}=2.002\,477$、$\hat{c}=0.666\,823$、$\hat{d}=0.995\,789$,因此,拟合的空间直线方程可表示为:

$$\begin{cases} x = 0.333\,248z + 2.002\,477 \\ y = 0.666\,823z + 0.995\,789 \end{cases} \tag{15}$$

空间直线的标准表达式是不唯一的,所以确定的 6 个参数也可以有很多种形式。由式(15)可转化为相应的标准形式表示为:

$$\frac{x - 2.002\,477}{0.333\,248} = \frac{y - 0.995\,789}{0.666\,823} = \frac{z - 0}{1} \tag{16}$$

表示该直线经过点(2.002 477,0.995 789,0),其方向矢量 $\boldsymbol{n} = [0.333\,248 \quad 0.666\,823 \quad 1]$。对任意一条空间直线而言,其方向向量具体取值可以不同,但是三个方向的比值应该是相同的。本文用 TLS 迭代法求得的拟合直线的方向矢量 $\boldsymbol{n} = [0.333\,248 \quad 0.666\,823 \quad 1]$,这和文献[8]中的已知值 $\boldsymbol{n} = [0.267\,261 \quad 0.534\,622 \quad 0.801\,744]$ 非常接近(都非常的接近于 1∶2∶3)。

确定直线方程以后,可以很容易地得到用于拟合的各点到该直线的误差 $\Delta_i$,具体值也列于表 1 中。结果显示,$\sum \Delta = 0.029$,这一结果都优于文献[2,8]的相应结果 $\sum \Delta = 0.030\,5$、$\sum \Delta = 0.035\,4$,这表明本文方法是可行的,并且具有更好的拟合效果。另一方面,通过对直线度的比较,采用本文方法求得直线度的值和文献[2,8]中的结果也是非常接近的,进一步说明了本文方法的可行性,具体结果如表 2 所示。

**表 2　各种方法直线度的比较**

Tab. 2　Comparison of Different Method's Straightness

| | 文献[2] | 文献[9] | 本文结果 |
|---|---|---|---|
| $\max(\Delta_i)$ | 0.008 6 | 0.007 8 | 0.008 1 |
| $\min(\Delta_j)$ | 0.000 9 | 0.001 2 | 0.000 8 |
| 直线度 | 0.007 7 | 0.006 6 | 0.007 3 |

## 3　结　语

在进行空间直线拟合时,由于其直线方程不能像平面直线拟合那样表示为简单的线性形式,所以不能直接采用 LS 法进行解算。以牛顿-梯度最优化算法为代表的迭代算法涉及大量方程组的求解,求解过程较为繁琐,实用性不佳。而将三维问题转化为二维问题在平面上利用 LS 法的方法进行直线拟合的方法并没有同时考虑三个方向上的误差,在理论上又不严密。本文提出的空间直线整体最小二乘算法,对空间直线方程的变形及参数转换,巧妙地将空间直线拟合的问题转化为整体最小二乘的参数求解问题,可以同时解决上述问题。对一组空间直线实测数据进行处理,并与其他文献的处理结果进行比较,证明了本文方法的可行性和有效性。

## 参　考　文　献


[1] Wang Weifeng, Wen Nai. Research on Fitting Method of Space Straight Line[J]. *Journal of Xuchang University*, 2010,9(5):37-39(王伟锋,温耐. 空间直线拟合研究[J]. 许昌学院学报,2010,9(5):37-39)

[2] Guo Jiming, Xiang Wei, Yin Hongbin. Three-Dimensional Line Fitting Without Iteration[J]. *Bulletin of Surveying and Mapping*, 2011(2):24-26(郭际明,向巍,尹洪斌. 空间直线拟合的无迭代算法[J]. 测绘通报,2011(2):24-26)

[3] Golub G H, van Loan C F. An Analysis of the Total Least Squares Problem[J]. *SIAM J Numer Anal*, 1980,17:883-893

[4] Kong Jian, Yao Yibin, Wu Han. Iterative Method for Total Least-Squares[J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2010,35(6):

711-714(孔建，姚宜斌，吴寒. 整体最小二乘的迭代解法[J]，武汉大学学报·信息科学版，2010，35(6)：711-714)

[5] Du Mingfang. Fitting of Space Straight Line[J]. *Journal of Beijing Institute of Printing*, 1996(8):27-31(杜明芳.空间直线拟合[J]. 北京印刷学院学报，1996(8)：27-31)

[6] van Huffel S, Vandeualle J. The Total Least Squares Problems[J]. *Computational Aspects and Analysis*, *Frontiers in Applied*, *Mathematics*, *SIAM*, *Philadelphia*, 1991(9):34-35,84-86

[7] Akyilmaz O. Total Least Squares Solution of Coordinate Transformation[J]. *Survey Review*, 2007(1)：68-80

[8] Chen Jiwei. Reacnch on Industrial measurement Data Fitting[D]. Shanghai：Tongji University，2005(陈基伟.工业测量数据拟合研究[D].上海：同济大学，2005)

# Total Least Squares Algorithm for Fitting Spatial Straight Lines

*YAO Yibin*[1] *HUANG Shuhua*[1] *KONG Jian*[1,2] *HE Junquan*[3]

1 School of Geodesy and Geomatics, Wuhan University, Wuhan 430079, China

2 Ohio State University School of Earth Science, Columbus, OH 43210, USA

3 Reconnaissance Mapping Research Institute of Wenzhou, Wenzhou 32500, China

**Abstract**：To address the problem of fitting a straight line in three-dimensional space, since the equation is a six parameter equation, not a simple linear relationship, the traditional least squares method cannot be used to solve it. In this paper, a new method of space line based on the total least squares is proposed. Firstly, the number of parameters was decreased from six to four by changing the standard equation of the straight line, then re-expressed the equation in the form of a matrix. Therefore, the fitting problem was transformed to the parameter-solving problem in total least squares. Further, the fitting four parameters were obtained using a TLS iteration, and the six parameters of the space lines were recovered through a backtracking method. An experiment in the paper verifies the effectiveness and applicability of the new method.

**Key words**：spatial straight line; TLS; SVD; fitting

**First author**：YAO Yibin, professor, PhD supervisor, specializes in measurement data processing theory and methods. E-mail：ybyao@sgg.whu.edu.cn

**Foundation support**：The National Natural Science Foundation of China, Nos. 41174012, 41274022; the National 863 Program, No. 2013AA122502; New Century Excellent Talents in University, No. NCET-12-0428.