

导航卫星卷积码序列 MAP 译码算法分析与改进

胡毅¹ 宋茂忠^{1,2} 孟斌²

1 南京航空航天大学电子信息工程学院,江苏 南京,210016

2 中国航天科技集团公司卫星应用研究院,北京,100086

摘要:在对导航卫星卷积码序列应用 MAP 算法译码时,计算机会产生数值稳定性问题,输出错误的译码误码率,进而对定位结果的有效性和定位精度产生重要影响。针对该问题进行了具体分析,并对算法进行了改进,给出了一种基于最大状态度量的归一化 MAP 译码算法,在保持原算法最优性能的同时很好地解决了数值稳定性问题。通过仿真进一步验证了这种改进算法的有效性。

关键词:导航卫星卷积码;MAP 译码算法;数值稳定性;最大状态度量

中图法分类号:P228.41

文献标志码:A

卷积码是现代导航卫星广泛使用的一种差错控制编码^[1-4],如在 GPS 卫星现代化中,L2C 信号导航电文就使用限制长度为 7、码率为 1/2 的(2, 1, 6)前向纠错卷积码^[3-5]。其常规译码算法采用的是维特比(Viterbi)译码,而相对于维特比译码,最大后验概率 MAP(maximum a posteriori probability)译码则是一种性能最优译码^[6-7]。但另一方面,应用中发现,在对较长卷积码序列如 L2C 导航电文数据块(600 bit)应用 MAP 算法译码时,会产生数值稳定性问题,进而对定位结果的有效性和定位精度产生重要影响。对此给出了一种改进的归一化 MAP 译码算法,很好地解决了该问题。

1 MAP 译码算法及其不足

为便于分析问题,给出 1 位输入 2 位输出,3 位移位寄存器的(2, 1, 3)前向纠错卷积码,如图 1 所示。图中 u_k 为 k 时刻输入信息位, $u_k \in \{0, 1\}$, $c_k = (c_k^{(1)}, c_k^{(2)})$ 为编码器对应的输出码字, $c_k^{(j)} \in \{0, 1\}$, $j=1, 2$ 。

假设编码器输出序列为 $c = (c_1, c_2, \dots, c_N)$, 对应的译码器接收序列为 $y = (y_1, y_2, \dots, y_N)$, $y_k = (y_k^{(1)}, y_k^{(2)})$ 。令编码器状态集为 S , 根据输入 u_k 的值可以把 S 划分成 S_0 和 S_1 两个子集, 分别与 $u_k=0$ 和 $u_k=1$ 相对应。这样 k 时刻输入信息位

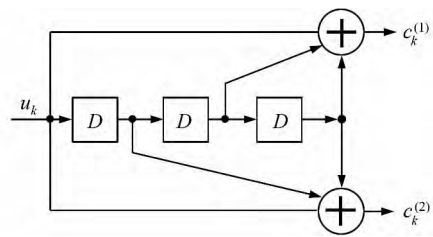


图 1 (2, 1, 3)卷积码编码器

Fig. 1 (2, 1, 3) Convolutional Code Encoder

u_k 的 MAP 算法估计 \hat{u}_k 为^[7]:

$$L(u_k) = \log \left[\frac{\sum_{(p,q) \in S_1} \alpha_{k-1}(p) \gamma_k(p,q) \beta_k(q)}{\sum_{(p,q) \in S_0} \alpha_{k-1}(p) \gamma_k(p,q) \beta_k(q)} \right] \quad (1)$$

$$\hat{u}_k = \begin{cases} 1, & L(u_k) \geq 0 \\ 0, & L(u_k) < 0 \end{cases} \quad (2)$$

式中, p, q 分别为 $k-1$ 和 k 时刻的编码器状态, $\alpha_{k-1}(p), \beta_k(q)$ 和 $\gamma_k(p, q)$ 分别为前向和后向状态度量及状态转移支路度量, 其满足递推关系:

$$\alpha_k(q) = \sum_{(p,q) \in S} \alpha_{k-1}(p) \gamma_k(p, q) \quad (3)$$

$$\beta_k(p) = \sum_{(p,q) \in S} \gamma_{k+1}(p, q) \beta_{k+1}(q) \quad (4)$$

$$\gamma_k(p, q) = P_r \{u_k\} p \{y_k | c_k\} \quad (5)$$

其中 $1 \leq k \leq N$ 。上面的递推初始条件一般为:

$$\alpha_0(p) = \begin{cases} 1, & p = 0 \\ 0, & p \neq 0 \end{cases}, \beta_N(q) = \begin{cases} 1, & q = 0 \\ 0, & q \neq 0 \end{cases} \quad (6)$$

应用中发现,在对较长卷积码序列进行译码时,经过多次状态转移后, $\alpha_k(p), \beta_k(q)$ 的值就会

收稿日期:2013-01-15

项目来源:中国航天科技集团公司卫星应用研究院创新基金资助项目(20121512)。

第一作者:胡毅,博士生,现主要从事导航卫星信号处理方面的研究。E-mail: hystarcom@163.com

变得越来越小,最后产生溢出而变为0,从而导致式(1)无法给出正确的判决结果,进而给出错误的译码误码率。

2 算法数值不稳定性分析

由于 $\beta_k(q)$ 的分析过程与 $\alpha_k(p)$ 类似,因此这里只对 $\alpha_k(p)$ 的情况进行分析。

对于式(3),令 k 时的状态转移为 $(p, q)_k$,同时令 $\gamma_k = \gamma_k(p, q)$ ($1 \leq k \leq N$),则有:

$$\alpha_k(p_k) = \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \sum_{(p,q)_4 \in S} \cdots \sum_{(p,q)_k \in S} [\gamma_4 \gamma_5 \cdots \gamma_{k-1} \gamma_k] \quad (7)$$

忽略前3项有限值,重点考虑后面的求和项。令

$$S_{k-3} = \sum_{(p,q)_4 \in S} \cdots \sum_{(p,q)_k \in S} [\gamma_4 \gamma_5 \cdots \gamma_{k-1} \gamma_k] \quad (8)$$

并取 $\gamma_t = \max\{\gamma_4, \gamma_5, \dots, \gamma_k\}$, 其中 $4 \leq t \leq k$, 同时注意到(8)式每个求和项都有2支,分别与0,1输入相对应,这样可得:

$$S_{k-3} \leq (2\gamma_t)^{k-3} \quad (9)$$

假设信道为无衰落零均值理想高斯白噪声信道,即 $y_t = c_t + n_t$ 。由于先验概率未知,可假设各输入信息位等先验概率^[8],从而有:

$$\gamma_t = \exp(-\|y_t - c_t\|^2 / N_0) \quad (10)$$

式中, N_0 为噪声功率谱密度。将 n_t 代入上式得:

$$\gamma_t = \exp\left\{-\frac{1}{2} \left[\frac{(n_t^{(1)} / \sqrt{N_0/2})^2}{+ (n_t^{(2)} / \sqrt{N_0/2})^2} \right]\right\} \quad (11)$$

由于 $n_t^{(1)}$ 、 $n_t^{(2)}$ 相互独立且 $(n_t^{(i)} / \sqrt{N_0/2}) \sim N(0, 1)$ 分布, $i=1, 2$, 这样有:

$$\chi_t^2 = \left[\left(\frac{n_t^{(1)}}{\sqrt{N_0/2}} \right)^2 + \left(\frac{n_t^{(2)}}{\sqrt{N_0/2}} \right)^2 \right] \sim \chi^2(2) \quad (12)$$

将式(12)代入式(11),当 $2\gamma_t < 1$, 即 $2\exp(-\chi_t^2/2) < 1$ 时,有:

$$\chi_t^2 > 2\ln 2 \quad (13)$$

由 $\chi^2(2)$ 性质可知, $P_r\{\chi_t^2 > 2\ln 2\} \approx 0.51$, 即(13)式会以很大概率得到满足。反之,由式(13)可得 $2\gamma_t < 1$, 且该结果不随 k 的变化而变化,这样由式(9)和式(7)可知,当输入码序列的长度越来越大时,会使 $\alpha_k(p_k)$ 越来越小,最终导致计算机产生溢出而变为0。同时,由式(10)~式(13)可知, $2\gamma_t < 1$ 成立的条件只与噪声 $\|n_t\|^2$ 有关,而与信号无关,这样当信号有衰落时,上述结论不变。由此可知,在用 MAP 算法译码时,随着码长的增加,计算机就会产生数值稳定性问题。对于其他卷积码也可以得到类似的结论,只是式(13)

右边的数值会有所不同。

3 算法的改进及其应用性能分析

3.1 算法的改进

通过归一化,在不改变判决过程的情况下,可使译码过程数值稳定,避免溢出的发生^[7]。

归一化系数可通过 $\sum_q \alpha'_k(q) = \sum_p \beta'_k(p) = 1$ 来获得^[7],也可由 $\alpha_{k-1}(p)$ 和 $\beta_k(q)$ 的最大值来确定。另外,还可选用中值数 $\alpha_{\text{mid}} = \exp[(\log \alpha_{\text{min}} + \log \alpha_{\text{max}})/2]$ 来得到^[8]。考虑到计算的简单性及减少舍入误差的影响,文中取状态度量的最大值来得到归一化系数。令

$$\tilde{\alpha}_{k-1} = \max_{p \in S} \{\alpha_{k-1}(p)\}, \tilde{\beta}_k = \max_{q \in S} \{\beta_k(q)\}$$

对于任一 k ($1 \leq k \leq N$) 下的所有可能状态,总能保证 $\tilde{\alpha}_{k-1} > 0, \tilde{\beta}_k > 0$ 。取

$$\alpha'_{k-1}(p) = \alpha_{k-1}(p) / \tilde{\alpha}_{k-1}, \beta'_k(q) = \beta_k(q) / \tilde{\beta}_k$$

则根据式(1)有:

$$L(u_k) = \log \left[\frac{\sum_{(p,q) \in S_1} \left(\frac{\alpha_{k-1}(p)}{\tilde{\alpha}_{k-1}} \right) \gamma_k(p,q) \left(\frac{\beta_k(q)}{\tilde{\beta}_k} \right)}{\sum_{(p,q) \in S_0} \left(\frac{\alpha_{k-1}(p)}{\tilde{\alpha}_{k-1}} \right) \gamma_k(p,q) \left(\frac{\beta_k(q)}{\tilde{\beta}_k} \right)} \right] = \log \left[\frac{\sum_{(p,q) \in S_1} \alpha'_{k-1}(p) \gamma_k(p,q) \beta'_k(q)}{\sum_{(p,q) \in S_0} \alpha'_{k-1}(p) \gamma_k(p,q) \beta'_k(q)} \right] \quad (14)$$

由于上面的处理过程是恒等变换,因此不会改变算法的最优性能。据此可得改进后的 MAP 译码算法的主要步骤为:

步骤1 初始化 $\alpha_0(p)$ 和 $\beta_N(q)$, 并取 $k=1$;

步骤2 依据卷积码状态转移图,按照式(10)及式(3)~(4)计算出 k 时的 $\gamma_k(p, q)$ 、 $\alpha_{k-1}(p)$ 和 $\beta_k(q)$;

步骤3 分别计算出 p 状态下的最大状态度量 $\tilde{\alpha}_{k-1}$ 和 q 状态下的最大状态度量 $\tilde{\beta}_k$;

步骤4 将得到的 $\tilde{\alpha}_{k-1}$ 和 $\tilde{\beta}_k$ 代入(14)式计算出 $\alpha'_{k-1}(p)$ 、 $\beta'_k(q)$ 及 $L(u_k)$, 然后再按照式(2)进行译码判决;

步骤5 令 $k=k+1$, 重复上面的步骤2到4,直到 $k=N$ 。

3.2 改进算法导航电文译码性能分析

为考察算法的改进效果,对所给(2, 1, 3)卷积码进行了算法改进前后的 Monte Carlo 仿真。

仿真条件:采用等先验概率,信号采用 $0 \rightarrow -1, 1 \rightarrow 1$ 映射双极性信号,两种 MAP 算法中的支路转移度量均按式(10)来计算。仿真按照接收

码序列信号 y 有无衰落两种情况进行。为检验算法的正确性,同时给出维特比译码算法仿真结果作为对比。

3.2.1 信号无衰落时的算法性能仿真

这是一种理想情形,此时接收码序列可表示为 $y_k = c_k + n_k (k=1, 2, \dots, N)$ 。不同码序列长度的译码仿真结果如图 2 所示,图中 MAP(R)表示改进的归一化 MAP 译码算法。仿真中编码器输入信号采用的是从 GPS 软件接收机输出中提取的 C/A 码单子帧导航电文即 300 bit 数据信号,和从中任意截取的 200 个数据信号。在每个 $(\frac{E_b}{N_0})_{dB}$ 点,(a)仿真 1 000 次,(b)仿真 600 次。

从图中可以看出,当码序列长度 N 较小时,MAP(R)和 MAP 译码算法性能相同,如图 2(a)所示。但是,当输入码序列超过一定长度时,MAP 算法由于溢出,输出了错误的译码误码率,在仿真图中表现为一条误码率水平起伏或基本不变的水平线,如图 2(b)所示。而此时 MAP(R)算法由于采用了状态度量归一化,改变了数值变化范围,因而仍能给出正确的算法结果。

3.2.2 信号有衰落时的算法性能仿真

此时接收码序列可表示为 $y_k = \mu_k c_k + n_k (k=1, 2, \dots, N)$,其中 μ_k 是 k 时刻服从一定分布的信号衰落复包络乘性系数,它直接反映了信号衰落的程度,值越小,则衰落越大^[9]。(a)对于莱斯(Rice)平坦衰落信道, μ_k 可表示为

$$\sqrt{\frac{(\xi_k + \sqrt{2K})^2 + \zeta_k^2}{2(K+1)}}$$

为单位, ξ_k, ζ_k 相互独立且服从 $N(0, 1)$ 分布^[9]。

(b)对于具有多普勒频移的瑞利(Rayleigh)平坦衰落信道, μ_k 可表示为 $\sqrt{\frac{\xi_k^2 + \zeta_k^2}{2}}$,其中 ξ_k, ζ_k 可由

下式近似得到^[9]:

$$\xi_k = \sqrt{\frac{2}{M}} \sum_{n=1}^M \cos(\omega_d k \cos \alpha_n + \varphi_n) \tag{15}$$

$$\zeta_k = \sqrt{\frac{2}{M}} \sum_{n=1}^M \cos(\omega_d k \sin \alpha_n + \varphi_n)$$

式中, $\omega_d = 2\pi f_d$ 为最大多普勒频移, $\alpha_n = \frac{2\pi n - \pi + \theta_n}{4M}, n = 1, 2, \dots, M, \theta_n, \varphi_n$ 和 φ_n 服从 $[-\pi, \pi)$ 上的均匀分布且相互统计独立, M 为所用正弦波数目。

两种衰落信道下的译码仿真结果如图 3 所示。仿真中输入信号采用的是从软件接收机获取的 C/A 码一帧完整导航电文即 1 500 bit 数据信

号。在每个 $(\frac{E_b}{N_0})_{dB}$ 点,仿真 200 次。由于导航电文多普勒频移非常小,因此仿真中将其取为 0。

图 3(a)是在具有直达信号的莱斯平坦衰落信道中 MAP 改进算法译码结果,这是在室外或具有较少遮挡物下的导航接收机典型工作场景。从图中可以看出,随着直达信号与多径信号功率比值 K 的增加,衰落对译码性能造成的影响得到明显改善。

图 3(b)是在瑞利平坦衰落信道即没有直达信号,并在不同码速率时改进的 MAP 算法译码结果,这是在室内或具有严重遮挡下的导航接收机的工作场景。从图中可以看出,在信号有较大衰落的情况下,改进的 MAP 译码算法也能给出正常的算法结果,但这时的误码率比无衰落时有明显的增加,并且这种性能变差随着码速率 R 的增加而恶化,这与接收机的实际工作特性相符。

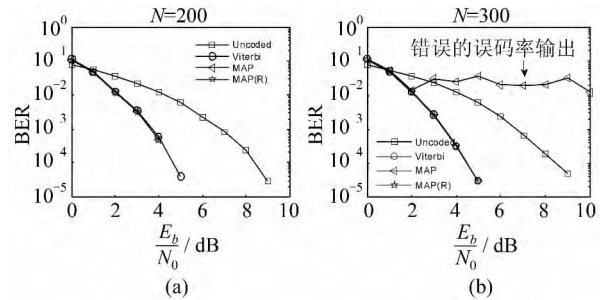


图 2 无衰落时不同码序列长度的算法性能仿真 Fig. 2 Algorithm Performance Simulations with Different Code Length and without Fading

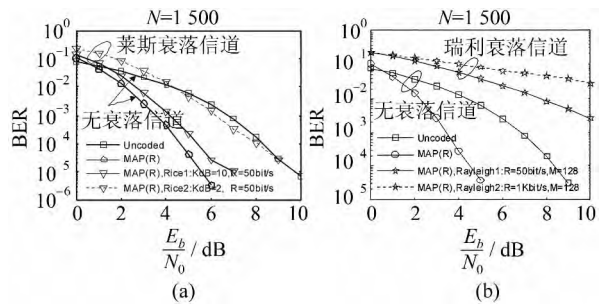


图 3 信号有衰落时的算法性能仿真 Fig. 3 Algorithm Performance Simulations with Signal Fading

4 结 语

本文针对导航卫星卷积码序列 MAP 译码算法的不足进行了具体分析,并给出了一种改进的归一化 MAP 译码算法,同时对改进后的算法进行了不同码长和不同信道条件下的译码性能仿

真。结果表明,改进后的 MAP 译码算法对于不同情况下的卷积码序列都能保证数值稳定性,给出正确的算法结果,因而更适合于导航卫星卷积码 MAP 译码的实际应用。

参 考 文 献

- [1] Chen Nan. Performance Evaluation of the Structure of GNSS[J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2008, 33(5): 512-515 (陈南. 卫星导航系统导航电文结构的性能评估[J]. 武汉大学学报·信息科学版, 2008, 33(5): 512-515)
- [2] Turunen S. Can Code Redundancy be Used to Improve GNSS Receiver Acquisition Sensitivity?[C]. 2006 IEEE/ION Position, Location and Navigation Symposium, San Diego, 2006
- [3] Chen Jinping, Wang Mengli, Qian Shuguang. Analysis of Modernization GNSS Navigation Message's Designing[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2011, 33(1): 211-217 (陈金平,王梦丽,钱曙光. 现代化 GNSS 导航电文设计分析[J]. 电子与信息学报, 2011, 33(1): 211-217)
- [4] Global Positioning System Directorate Systems Engineering & Integration Interface Specification, IS-GPS-200F[S]. GPS Joint Program Office, 2011
- [5] Pena A G, Boucheret M L, Macabiau C, et al. An Improved Method to Decode GPS L2C/L5 Navigation Message: Combination of the Inner and the Outer Channel Codes[C]. The 2009 International Technical Meeting of the Institute of Navigation, Anaheim, 2009
- [6] Berkan D, Sinan G. Detector Randomization and Stochastic Signaling for Minimum Probability of Error Receivers[J]. *IEEE Transactions on Communications*, 2012, 60(4): 923-928
- [7] Robertson P, Villebrun E, Hoecher P. A Comparison of Optimal and Sub-optimal MAP Decoding Algorithms Operation in the Log Domain[C]. International Conference on Communications 1995, Seattle, 1995
- [8] Steven S P, Adrian S B. A Simplification of the Modified Bahl Decoding Algorithm for Systematic Convolutional Codes[C]. International Symposium on Information Theory & its Applications (ISITA), Sydney, 1994
- [9] Nikolay K. Mobile Radio Channels Modeling in MATLAB[J]. *Radio Engineering*, 2003, 12(7): 12-16

Analysis and Improvement of the MAP Algorithm for Navigation Satellite Convolutional Codes Decoding

HU Yi¹ SONG Maozhong^{1,2} MENG Bin²

¹ College of Electronic Information Engineering, Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, Nanjing 210016, China

² The Academy of Satellite Application, China Aerospace Science and Technology Corporation, Beijing 100086, China

Abstract: Computers may encounter the problem of numerical instability and output a wrong bit error rate (BER) when decoding navigation satellite convolutional codes with the maximum a posteriori probability (MAP) algorithm. Subsequently, this will affect the validity and the accuracy of the positioning results. To address this problem, first a detailed analysis was executed. Based on this analysis, an improved MAP algorithm normalized with the maximum state metric is proposed, thus the question of numerical instability can be solved while still maintaining the original algorithm's optimal performance. Simulations further validate the effectiveness of this algorithm's improvement.

Key words: navigation satellite convolutional codes; MAP decoding algorithm; numerical stability; maximum state metric

First author: HU Yi, PhD candidate, specializes in navigation satellite signal processing. E-mail: hystarcom@163.com

Foundation support: The Open Research Fund of the Academy of Satellite Application, No. 20121512.