文章编号:1671-8860(2011)12-1495-05　　**文献标志码**:A

ARMA 滤波在加速度法反演地球重力场中的应用

钟　波[1,2]　汪海洪[1,2]　罗志才[1,2]　宁津生[1,2]

(1　武汉大学测绘学院,武汉市珞喻路 129 号,430079)
(2　武汉大学地球空间环境与大地测量教育部重点实验室,武汉市珞喻路 129 号,430079)

摘　要:探讨了根据 ARMA 模型构造白化滤波器对卫星加速度进行去相关滤波的方法。给出了加速度法和去相关最小二乘解算的基本原理,推导了基于加速度法整体求解加速度计尺度因子、偏差参数和重力场位系数的计算公式。在此基础上,讨论了利用 ARMA 去相关滤波法抑制卫星加速度有色噪声的具体处理方案。实验结果验证了所提方法的有效性。

关键词:加速度法;ARMA 滤波;有色噪声;地球重力场;CHAMP
中图法分类号:P223.0

目前,利用卫星轨道和加速度计数据反演地球重力场的方法[1-8]中,加速度法引起了许多学者的关注,并取得了一些重要进展[9,10]。利用加速度法反演高精度地球重力场模型仍有一些关键问题亟待解决,其中之一便是卫星加速度观测值的滤波或定权处理。由于卫星加速度是由卫星轨道数值微分计算的,而数值微分会严重放大高频误差,进而降低加速法求解重力场模型的精度。针对这一问题,文献[6,7,9,11]各自提出了解决方案。本文在此基础上,讨论了根据 ARMA 模型构造白化滤波器对实测数据进行去相关滤波的方法。同时,针对星载加速度计数据的校准,同时求解加速度计尺度因子、偏差参数和重力场模型位系数,并推导了相应的计算公式。

1　基本原理

1.1　加速度法观测方程及其求解

在地心惯性系下,卫星的运动方程为:

$$\boldsymbol{r}(t)=\boldsymbol{a}_e(t)+\boldsymbol{a}_g(t)+\boldsymbol{a}_{ng}(t) \tag{1}$$

式中,$\boldsymbol{r}(t)$为卫星加速度,由卫星轨道数值微分得到。式(1)右边第一项为地球引力加速度;第二项为除地球引力外的保守力加速度;第三项为非保守力加速度,可由星载加速度计测定。在地心惯性系下,地球引力加速度为[12]:

$$\boldsymbol{a}_e(t)=\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}(t)\left[\frac{\partial V}{\partial(r,\varphi,\lambda)}\frac{\partial(r,\varphi,\lambda)}{\partial(x,y,z)}\right]^{\mathrm{T}} \tag{2}$$

式中,(r,φ,λ)与(x,y,z)分别为卫星在地固系下的球坐标和直角坐标;$\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}(t)$为地固系到惯性系的转换矩阵;$V$ 为地球引力位,它是重力场位系数$\{\bar{C}_{lm};\bar{S}_{lm}\}$的线性函数。

卫星所受的非保守力摄动加速度在惯性系下可表示为[4,5]:

$$\boldsymbol{a}_{ng}(t)=\boldsymbol{R}(t)\begin{bmatrix}S_x(a_{x0}+B_x)\\S_y(a_{y0}+B_y)\\S_z(a_{z0}+B_z)\end{bmatrix} \tag{3}$$

式中,各参数意义参见文献[4,5]。

若将重力场位系数 $\boldsymbol{u}=\{\bar{C}_{lm};\bar{S}_{lm}\}$和加速度计校准参数 $\boldsymbol{v}=\{S_i;B_i\}$作为未知参数同时求解,由式(1)可得到相应的观测方程为:

$$\Delta\boldsymbol{r}(t)=\frac{\partial\boldsymbol{a}_e(t)}{\partial\boldsymbol{u}}\Delta u+\frac{\partial\boldsymbol{a}_{ng}(t)}{\partial\boldsymbol{v}}\Delta\boldsymbol{v} \tag{4}$$

式中,$\Delta\boldsymbol{r}(t)$为卫星加速度的观测值与计算值之差;$\Delta\boldsymbol{u}$、$\Delta\boldsymbol{v}$ 分别为重力场位系数和加速度计标校参数的改正数;$\frac{\partial\boldsymbol{a}_e(t)}{\partial\boldsymbol{u}}$为地球引力加速度对位系数的偏导数,可由式(2)对位系数 $\boldsymbol{u}$ 求偏导数得到,具体形式见文献[12]。$\frac{\partial\boldsymbol{a}_{ng}(t)}{\partial\boldsymbol{v}}$为非保守力摄

收稿日期:2011-10-11。
项目来源:国家自然科学基金资助项目(40874002,40874004,41104014);国家科技支撑计划资助项目(2008BAC35B);国家教育部新世纪优秀人才支持计划资助项目(NCET-07-0635);测绘遥感信息工程国家重点实验室专项科研经费资助项目。

动加速度对标校参数 $\boldsymbol{v}$ 的偏导数，具体形式可由式(3)得到：

$$\frac{\partial \boldsymbol{a}_{ng}(t)}{\partial \boldsymbol{v}} = \boldsymbol{R}(t) \cdot \begin{bmatrix} a_{x0}+B_{x0} & 0 & 0 & S_{x0} & 0 & 0 \\ 0 & a_{y0}+B_{y0} & 0 & 0 & S_{y0} & 0 \\ 0 & 0 & a_{z0}+B_{z0} & 0 & 0 & S_{z0} \end{bmatrix} \tag{5}$$

将式(2)和式(3)对未知参数的偏导数代入式(4)，可得到加速度法同时求解重力场位系数和加速度计标校参数的线性观测方程。其中，$\Delta\boldsymbol{u}$ 为全局参数；$\Delta\boldsymbol{v}$ 为局部参数。令 $\boldsymbol{x}=[\Delta\boldsymbol{u} \quad \Delta\boldsymbol{v}]^{\mathrm{T}}$，观测方程(4)可表示为：

$$\boldsymbol{d} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{e} \tag{6}$$

其中，$\boldsymbol{d}$ 为加速度残差向量；$\boldsymbol{A}$ 为设计矩阵；$\boldsymbol{e}$ 为误差向量。可得未知参数的最小二乘解为：

$$\hat{\boldsymbol{x}} = (\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_d^{-1}\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_d^{-1}\boldsymbol{d} \tag{7}$$

式中，$\boldsymbol{C}_d^{-1}$ 为卫星加速度观测值的权阵；$\hat{\boldsymbol{x}}$ 为未知参数改正数的估值。

1.2 去相关与ARMA滤波

已有分析表明[7,11]，由数值微分得到的卫星加速度误差通过误差传播后变成了相关的有色噪声，并且数值微分过程会放大高频误差，它近似正比于频率的平方。对于高采样率的数据来说，高频部分的误差甚至会超过信号本身，降低了卫星加速度的信噪比。有色噪声的处理采用较多的是去相关算法[13]，它将 $\boldsymbol{C}_d$ 分解为 $\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}$，并将 $(\boldsymbol{R}^{-1})^{\mathrm{T}}$ 左乘式(6)中的各项得：

$$\bar{\boldsymbol{d}} = \bar{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{x} + \bar{\boldsymbol{e}} \tag{8}$$

其中，$\bar{\boldsymbol{d}}=(\boldsymbol{R}^{-1})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{d}$；$\bar{\boldsymbol{A}}=(\boldsymbol{R}^{-1})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$，$\bar{\boldsymbol{e}}=(\boldsymbol{R}^{-1})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e}$。以上过程即是对式(6)中的各项进行滤波，且 $\bar{\boldsymbol{d}}$ 的协方差阵为单位阵($\boldsymbol{C}_{\bar{d}}=(\boldsymbol{R}^{-1})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_d\boldsymbol{R}^{-1}=I$)，因而上述滤波实质是一种白化滤波，$\boldsymbol{F}=(\boldsymbol{R}^{-1})^{\mathrm{T}}$ 为相应的滤波器。因此，式(8)的最小二乘解为：

$$\hat{\boldsymbol{x}} = ((\boldsymbol{F}\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{F}\boldsymbol{A}))^{-1}(\boldsymbol{F}\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}\boldsymbol{d} \tag{9}$$

基于去相关最小二乘解的关键是构造白化滤波器 $\boldsymbol{F}$，本文根据ARMA模型构造相应的滤波器。ARMA过程的差分方程可表示为[13]：

$$c(n) = -\sum_{i=1}^{p} a_i c(n-i) + \sum_{i=0}^{q} b_i w(n-i) \tag{10}$$

式中，$w(n)$ 为输入的白噪声序列；$c(n)$ 激励ARMA模型输出有色噪声；$a_i(i=1,\cdots,p)$、$b_i(i=0,1,\cdots,q)$ 为滤波系数；(p,q) 为ARMA模型的阶数。ARMA模型是线性移不变的离散系统，其系统函数为[13]：

$$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^{q} b_i z^{-i}}{1+\sum_{i=1}^{p} a_i z^{-i}} \tag{11}$$

由于 $H(z)$ 是因果稳定可逆的，有色噪声 $c(n)$ 激励逆系统 $1/H(z)$ 的输出将是白噪声。即逆系统 $1/H(z)$ 具有白化滤波的功能，可作为式(9)中的白化滤波器 $\boldsymbol{F}$。因此，利用ARMA模型拟合卫星加速度的有色噪声，得到相应的滤波系数，然后，采用逆滤波对卫星加速度进行白化处理，可达到去相关的目的。

需要指出的是，真实的卫星加速度误差无法精确给出，实际计算中可采用先验信息得到一个初始解 $\boldsymbol{x}_0$，以验后残差 $\hat{\boldsymbol{e}}=A\boldsymbol{x}_0-\boldsymbol{d}$ 作为加速度误差的估值。

2 地球重力场反演

采用武汉大学GNSS中心提供的CHAMP几何法轨道和GFZ数据中心提供的加速度计数据(2003-08-09～2003-09-23，共46 d)进行重力场解算。几何法轨道的采样间隔为30 s，精度为4～5 cm[14]，加速度计数据为10 s采样，降采样为30 s。为了比较加速度计数据校准和ARMA滤波效果，本文设计了3种计算方案：① 方案1，加速度计数据不进行校准，根据加速度法按等权解算重力场位系数；② 方案2，根据加速度法按等权同时求解重力场位系数和加速度计标校参数；③ 方案3，以方案2解算的卫星加速度验后残差作为加速度误差的估值，构造ARMA白化滤波器，根据加速度法由去相关最小二乘解算重力场位系数和加速度计标校参数。上述计算中，地球重力场模型求解的最大阶次为60，加速度计数据的尺度和偏差参数每天估计一组。卫星加速度的观测值采用9点牛顿插值的二次微分公式[6,8]计算，地球引力以外考虑的保守力有日月引力、固体潮、海潮、大气潮、极潮和相对论效应，非保守力由加速度计测量值代替。

图1为以上3种计算方案反演的重力场模型与EIGEN-CG03C模型比较得到的大地水准面累积误差。EIGEN-CG03C模型是由CHAMP、GRACE数据和地面重力数据解算的高精度重力场模型，其精度远优于CHAMP数据解算的重力场模型，可作为检核模型。比较方案1和方案2的解算结果可知，加速度计数据的尺度和偏差等误差对恢复重力场模型低阶次位系数的影响非常

严重,同时求解重力场模型位系数和标校加速度计参数后,所恢复重力场模型的精度有了明显的提高。因此,使用加速度计数据必须对其进行校准,以避免非保守力误差的累积。

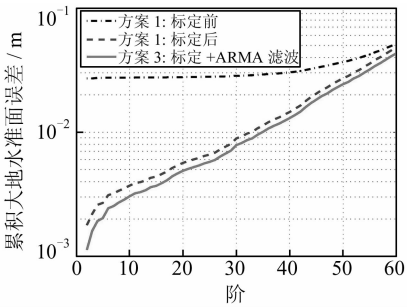

图 1　各方案解算模型相对于 EIGEN-CG03C 模型的大地水准面累积误差

Fig. 1　Cumulative Geoid Errors Between Derived Models and EIGEN-CG03C Model

由于方案 2 并没有处理卫星加速度的有色噪声,因此,方案 3 以方案 2 解算的结果为初值,得到卫星加速度 3 个分量的验后残差,并作为加速度的观测误差。以卫星加速度误差的 x 分量为例,构造 ARMA 白化滤波器进行滤波处理,图 2(a)给出了加速度 x 分量的误差 PSD。可知,真实的卫星加速度误差并不具有白噪声的特性,其高频部分误差迅速增大,最大高频误差高出低频部分 2 个多量级。本文在保证一定滤波效果和计算效率的条件下,根据加速度误差序列自相关函数和偏相关函数的拖尾与截尾性来确定 ARMA 模型合适的阶数。经分析可基于 ARMA(100,1)模型对卫星加速度 x 分量的误差进行滤波处理,图2(b)给出了滤波后的加速度误差 PSD,可以看出滤波后的加速度误差可近似作为白噪声来处理。

同理,根据 ARMA(100,1)模型和 ARMA(120,1)模型构造了相应的白化滤波器,分别对加速度 y、z 分量误差进行了滤波处理。将构造的 3 个分量的 ARMA 白化滤波器应用于去相关最小二乘解算,得到了 ARMA 滤波后的重力场模型,记为 WHUCHAMP-ACC60KP。从图 1 可知,方案 3 采用 ARMA 滤波器对卫星加速度进行去相关滤波后,其恢复的重力场模型精度相比方案 2 解算模型的精度有了进一步提高,初步验证了 ARMA 滤波方法的有效性。需要说明的是,以方案 3 的计算结果为初值还可作进一步的迭代计算,但结果表明进一步迭代计算对解算精度的提高并不明显,而且大大增加了计算负担。

图 3 给出了 EGM96、EIGEN-1S、EIENG-2、

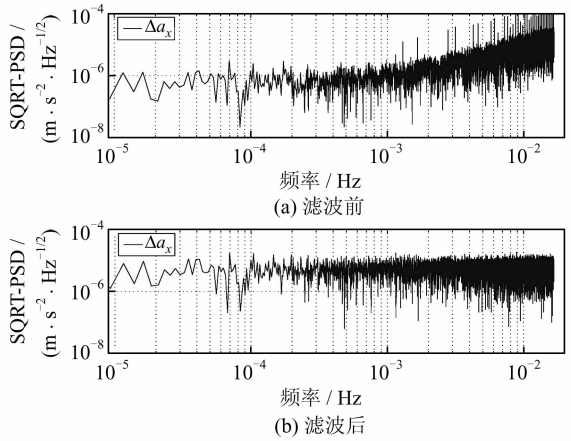

图 2　卫星加速度 x 分量滤波前后的误差功率谱

Fig. 2　Power Spectral Density of Acceleration Errors Pre- and Post Processed by ARMAC(100,1) Filtering

EIGEN-CHAMP03S 和 WHUCHAMP-ACC60KP 与 EIGEN-CG03C 模型比较得到的位系数阶误差 RMS。可以看出,WHUCHAMP-ACC60KP、EIGEN-1S 和 EIENG-2 模型的低阶位系数符合较好,随着阶数的增加,WHUCHAMP-ACC60KP 模型的精度优于 EIGEN-1S,而接近于 EIENG-2 模型。WHUCHAMP-ACC60KP 模型前 43 阶的精度优于 EGM96 模型,EIGEN-1S 和 EIENG-2 模型优于 EGM96 模型精度对应的最大阶数分别为 30 和 45,而 EIGEN-CHAMP03S 模型前 60 阶的精度均要好于其他比较模型。

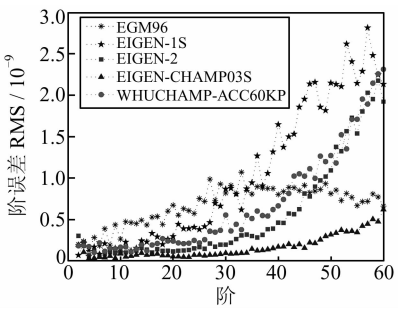

图 3　各种模型相比 EIGEN-CG03C 模型的阶误差 RMS

Fig. 3　Degree-Error RMS Between EGM96, EIGEN-1S, EIGEN-2, EIGEN-CHAMP03S, WHUCHAMP-ACC60KP and EIGEN-CG03C

为了进一步评价 WHUCHAMP-ACC60KP 模型的精度与可靠性,取上述各模型前 30、40、50 和 60 阶位系数分别计算了全球 1°×1°的大地水准面高,表 1 为各模型与 EIGEN-CG03C 模型比较得到的大地水准面高差统计值。由表 1 可知,WHUCHAMP-ACC60KP 模型前 30、40、50 和 60 阶位系数获得的大地水准面高差的均方根依次为 5.1 cm、10.4 cm、22.1 cm 和 47.5 cm,明显

优于同阶次的EIGEN-1S模型，而与EIGEN-2模型精度更为接近。WHUCHAMP-ACC60KP模型前50阶的精度明显优于EGM96模型，但到60阶时其精度略低于EGM96模型；WHUCHAMP-ACC60KP、EIENG-2和EIGEN-CHAMP03S模型前30阶的精度远好于EGM96和EIGEN-1S模型，它们在长波部分更具有一致性。

表1 各种模型相比EIGEN-CG03C模型得到的大地水准面高差统计值/cm

Tab. 1 Statistical Results of Geoid Differences Between EGM96, EIGEN-1S, EIGEN-2, EIGEN-CHAMP03S, WHUCHAMP-ACC60KP and EIGEN-CG03C/cm

重力场模型	阶数	最大值	最小值	RMS
EGM96	30	111.5	−93.7	17.1
	40	278.9	−213.9	28.4
	50	372.3	−253.1	37.4
	60	507.0	−328.0	44.5
EIGEN-1S	30	40.4	−55.3	12.3
	40	100.2	−135.2	25.1
	50	242.8	−271.4	47.6
	60	517.3	−540.9	69.9
EIGEN-2	30	15.3	−14.9	3.6
	40	28.9	−32.5	7.6
	50	104.1	−102.3	20.7
	60	420.5	−415.9	47.3
EIGEN-CHAMP03S	30	6.0	−5.9	1.6
	40	12.0	−13.5	2.9
	50	23.7	−19.8	5.8
	60	87.2	−79.1	14.4
WHUCHAMP-ACC60KP	30	21.7	−19.5	5.1
	40	63.1	−48.2	10.4
	50	118.4	−157.5	22.1
	60	244.5	−286.6	47.5

3 结 语

由于本文采用的CHAMP卫星数据时间长度较短，限制了重力场模型解算的精度，若增加数据的时间跨度，相应解算精度将会进一步提高。同时，本文仅以CHAMP数据为例进行了计算，但本文方法同样适用于GRACE、GOCE任务中高低卫-卫跟踪数据的处理。

致谢：感谢武汉大学GNSS中心和德国GFZ数据中心提供CHAMP几何法轨道和加速度计数据。

参 考 文 献

[1] Visser P N A M, Sneeuw N, Gerlach C. Energy Integral Method for Gravity Field Determination from Satellite Orbit Coordinates[J]. Journal of Geodesy, 2003, 77: 207-216

[2] 徐天河，杨元喜. 利用CHAMP卫星几何法轨道恢复地球重力场模型[J]. 地球物理学报，2005，48(2)：288-293

[3] 王正涛. 卫星跟踪卫星测量确定地球重力场的理论与方法[D]. 武汉：武汉大学，2005

[4] 邹贤才. 卫星轨道理论与地球重力场模型的确定[D]. 武汉：武汉大学，2007

[5] 张兴福，沈云中. 利用动力学法标校CHAMP卫星加速度计数据[J]. 武汉大学学报·信息科学版，2007，32(2)：176-179

[6] Reubelt T, Austen G, Grafarend E G. Harmonic Analysis of Earth's Gravitational Field by Means of Semi-continuous Ephemerides of a Low Earth Orbiting GPS-tracked Satellite. Case Study: CHAMP[J]. Journal of Geodesy, 2003, 77: 257-278

[7] Dimar P, der van Sluijs A A E. A Technique for Modeling the Earth's Gravity Field on the Basis of Satellite Accelerations[J]. Journal of Geodesy, 2004, 78: 12-33

[8] 沈云中. 应用CHAMP卫星星历精化地球重力场模型的研究[D]. 武汉：中国科学院测量与地球物理研究所，2000

[9] Dimar P, Kuznetsov V, van der Sluijs A A E, et al. 'DEOS_CHAMP-01C_70': a Model of the Earth's Gravity Field Computed from Accelerations of the CHAMP Satellite[J]. Journal of Geodesy, 2006, 79: 586-601

[10] Ditmar P, Liu Xianglin. Dependence of the Earth's Gravity Model Derived from Satellite Accelerations on a Priori Information[J]. Journal of Geodynamics, 2007, 43: 189-199

[11] 宁津生，钟波，罗志才，等. 基于卫星加速度恢复地球重力场的去相关滤波法[J]. 测绘学报，2010，39(4)：331-337

[12] Xu Guochang. GPS Theory Algorithms and Applications[M]. Berlin: Springer-Verlag, 2003

[13] Schuh W D. Tailored Numerical Solution Strategies for the Global Determination of the Earth's Gravity Field[M]. Graz: Mitteilungen der geodätischen Institute der Technischen Universität Graz, 1996

[14] 赵齐乐，施闯，柳响林，等. 重力卫星的星载GPS精密定轨[J]. 武汉大学学报·信息科学版，2008，33(8)：810-814

第一作者简介：钟波，讲师，博士后，主要从事物理大地测量和卫星重力学研究。

E-mail: bzhong@sgg.whu.edu.cn

Application of ARMA Filtering to Earth's Gravity Field Recovery Based on Acceleration Approach

ZHONG Bo[1,2]　*WANG Haihong*[1,2]　*LUO Zhicai*[1,2]　*NING Jinsheng*[1,2]

(1　School of Geodesy and Geomatics, Wuhan University, 129 Luoyu Road, Wuhan 430079, China)

(2　Key Laboratory of Geospace Environment and Geodesy, Ministry of Education, Wuhan University, 129 Luoyu Road, Wuhan 430079, China)

Abstract: As the noise in orbit-derived accelerations is colored, the decorrelation filter based on ARMA (auto regressive moving average) model is proposed to suppress the noise. The principle of the acceleration approach and the least-squares solution using decorrelation algorithm are introduced. And the mathematic model to simultaneously estimate the accelerometer scale factors, bias parameters and geopotential coefficients are also derived. Furthermore, the specific scheme for processing the colored noise of satellite accelerations based on ARMA filter is discussed. The Earth's gravity field model WHUCHAMP-ACC60KP up to degree 60 is recovered from 46-day CHAMP kinematic orbits and accelerometer data. Compared with the models of EGM96, EIGEN-1S, EIGEN-2 and EIGEN-CHAMP03S, the results show that WHUCHAMP-ACC60KP is more accurate than EIGEN-1S, and its total accuracy is near to the model of EIGEN-2, which validates the effectiveness of the proposed method.

Key words: acceleration approach; ARMA filtering; colored noise; Earth's gravity field; CHAMP

About the first author: ZHONG Bo, lecturer, postdoctor, majors in physical geodesy and satellite gravimetry.

E-mail: bzhong@sgg.whu.edu.cn

(上接第 1429 页)

image, an algorithm for digital watermark based on pseudo-random sequence and DCT for remote sensing image was proposed. Firstly, the original image was segmented, and the image blocks were selected by the pseudo-random sequence. Then, the low frequency coefficients after DCT were got, and the watermark information was embedded in the low frequency coefficients of each image block using the quantitative method. Finally, the errors of embedded image were controlled by the accuracy constraints. Because the watermark information embedded was done with quantitative method, the watermarked image authentication needed no information about the original image. This algorithm realized blind extraction of digital watermarking. The experimental results show that the proposed algorithm the robustness and achieve near-zero change of remote sensing image.

Key words: pseudo-random sequence; DCT; remote sensing image; watermark

About the first author: ZHU Changqing, Ph.D, professor, Ph.D supervisor, majors in spatial data safety and GIS.

E-mail: zcq88@263.net