文章编号:1671-8860(2011)11-1328-04　　**文献标志码**:A

给定内插重力异常精度时对重力数据的要求

李振海[1]　罗志才[1,2,3]　汪海洪[1,2]　钟　波[1,2]

(1　武汉大学测绘学院,武汉市珞喻路 129 号,430079)
(2　武汉大学地球空间环境与大地测量教育部重点实验室,武汉市珞喻路 129 号,430079)
(3　武汉大学测绘遥感信息工程国家重点实验室,武汉市珞喻路 129 号,430079)

摘　要:基于最小二乘配置误差估计公式,建立了重力异常格网数据的分辨率和精度与重力异常内插值精度的关系,提出了在给定插值精度时反推已知格网数据的分辨率和精度的方法。以 EGM2008 重力场模型为例,在不同分辨率和精度条件下进行重力异常插值实验。实验结果与本文方法的计算结果基本一致,表明该方法具有一定的可行性。

关键词:重力异常;内插;最小二乘配置;分辨率;协方差
中图法分类号:P223.7

在局部地球重力场逼近研究或重力场的某些应用中,通常需要利用一些已知的重力异常数据内插某些点的重力异常值。在插值计算时,已知数据的分辨率、数据精度和数据范围都会影响到重力异常的插值精度,因此,需要研究离散观测数据的分辨率和观测误差与重力场逼近的精度之间的关系[1]。文献[2,3]讨论了数据分辨率与最小二乘配置解精度之间的关系;文献[4]利用不同分辨率的扰动重力数据分别模拟了对 GPS/重力边值问题的影响;文献[5]进一步探讨了同时顾及数据分辨率及观测误差线性估计结果的精度问题。研究这一问题更重要的意义在于其反过程,即在给定待估量精度的条件下推求已知重力数据的格网分辨率、数据精度和数据范围等约束条件,可用于指导重力和 GPS 水准等数据观测方案的优化设计,以达到对施测工程投入少、收效大的目的。如陈俊勇等人于 2001 年在给定局域(似)大地水准面的精度条件下,针对不同的地形类型提出了对 GPS 水准点和重力数据的密度要求[6],并用于指导 GPS 水准网格间距的设计[7];孙凤华等人给出了在格网重力数据精度相同条件下的重力补点公式[8],对重力数据分辨率的确定进行了研究[9]。

根据给定内插重力异常值精度确定已知数据所需的分辨率和精度是典型的反问题,具有较大的困难。本文在上述研究的基础上,利用最小二乘配置的误差估计公式建立了数据分辨率和精度与内插值精度的关系,给出了一种由插值精度确定已知数据所需分辨率和精度的方法。

1　理论方法

内插可以看作是一个线性估计问题,故可以利用最小二乘配置理论讨论已知重力异常数据分辨率和精度与内插值精度的关系。文献[2,3]在频域内对这一问题进行了探讨,本文直接从最小二乘配置误差估计公式出发,给出了一种简单的计算方法。最小二乘配置误差估计公式[10,11]为:

$$\boldsymbol{C}_{ee}=\boldsymbol{C}_{\Delta g'\Delta g'}-\boldsymbol{C}_{\Delta g'\Delta g}(\boldsymbol{C}_{\Delta g\Delta g}+\boldsymbol{C}_{vv})^{-1}\boldsymbol{C}_{\Delta g\Delta g'} \quad (1)$$

式中,$\boldsymbol{C}_{\Delta g'\Delta g'}$为内插点重力异常的协方差阵;$\boldsymbol{C}_{\Delta g\Delta g}$为已知点重力异常的协方差阵;$\boldsymbol{C}_{vv}$为已知点重力异常的误差协方差阵;$\boldsymbol{C}_{\Delta g'\Delta g}$为重力异常内插点与已知点的互协方差阵;$\boldsymbol{C}_{ee}$是内插点重力异常的误差协方差阵;$\Delta g$ 是已知点的重力异常值;$\Delta g'$是待定点的重力异常内插值。

收稿日期:2011-09-15。
项目来源:国家自然科学基金资助项目(40874002,40704003);国家 973 计划资助项目(2007CB714405);国家教育部新世纪优秀人才支持计划资助项目(NCET-07-0635);武汉大学地球空间环境与大地测量教育部重点实验室开放研究基金资助项目(08-02-03)。

式(1)主要揭示了估值误差与协方差、观测误差之间的关系,但没有将已知数据分辨率体现出来。而已知数据的协方差 $\boldsymbol{C}_{\Delta g\Delta g}$、已知数据与内插数据之间的互协方差 $\boldsymbol{C}_{\Delta g'\Delta g}$ 在不同分辨率的情况下具有不同的维数和表达结果,即 $\boldsymbol{C}_{\Delta g\Delta g}$ 和 $\boldsymbol{C}_{\Delta g'\Delta g}$ 与已知数据分辨率具有密切的联系。所以建立了 $\boldsymbol{C}_{\Delta g\Delta g}$、$\boldsymbol{C}_{\Delta g'\Delta g}$ 与分辨率之间的关系,便可根据式(1)建立估值误差与已知数据分辨率和精度之间的关系。

本文设计已知格网重力异常数据点位与内插点之间的相对位置如图 1 所示,设内插点位于原点 O,以正方形框来表示已知数据对内插点的有效作用范围,其搜索半径为 D,d 表示已知数据的分辨率,I、J 分别表示在横向和纵向距离原点的间隔个数。则内插点周围的已知格网点的数目 n 可由格网数据的分辨率 d 和内插计算的搜索半径 D 共同确定,$n=(2N+1)^2-1$,$N=\lfloor D/d \rfloor$(向下取整),这样便确定了 $\boldsymbol{C}_{\Delta g\Delta g}$ 和 $\boldsymbol{C}_{\Delta g'\Delta g}$ 的维数,分别为 $n\times n$ 和 $1\times n$。$\boldsymbol{C}_{\Delta g\Delta g}$ 和 $\boldsymbol{C}_{\Delta g'\Delta g}$ 用矩阵形式表示为:

$$\boldsymbol{C}_{\Delta g\Delta g}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{C}_{11} & \cdots & \boldsymbol{C}_{1n} \\ & \ddots & \\ \vdots & \boldsymbol{C}_{kl} & \vdots \\ & \ddots & \\ \boldsymbol{C}_{n1} & \cdots & \boldsymbol{C}_{nn} \end{bmatrix} \tag{2}$$

$$\boldsymbol{C}_{\Delta g'\Delta g}=[\boldsymbol{C}_1,\cdots,\boldsymbol{C}_t,\cdots,\boldsymbol{C}_n] \tag{3}$$

式(2)和式(3)中的元素可由协方差函数根据距离 s 计算得到。图 1 中,假设其中一点坐标为$(i\cdot d, j\cdot d)$,另一点坐标为$(u\cdot d, v\cdot d)$,则这两点间的距离 s 满足:

$$s^2=[(i-u)^2+(j-v)^2]\cdot d^2 \tag{4}$$

式中,i、j、u、$v\in[-N,N]$。对应于式(2)和式(3),$s_{kl}^2=[(i-u)^2+(j-v)^2]\cdot d^2$,$s_t^2=(i^2+j^2)\cdot d^2$,其中,$k$、$l$、$t\in[1,\ n]$。

协方差函数未知时,一般要通过对已知数据进行拟合得到,本文根据文献[12]提供的方法计算局部协方差函数值,再采用高斯函数对协方差函数值进行拟合。高斯函数模型为:

$$C(s)=C_0\mathrm{e}^{-(s^2/A^2)} \tag{5}$$

式中,C_0、A^2 为模型参数。

将式(4)代入式(5),便得到 $\boldsymbol{C}_{\Delta g\Delta g}$ 和 $\boldsymbol{C}_{\Delta g'\Delta g}$ 的矩阵元素。显然,已知数据的协方差阵和已知点与内插点之间的互协方差阵的元素是由数据分辨率 d 和指标 I、J 来表示的,根据式(1),便建立了内插值精度与已知数据分辨率及误差之间的关系。

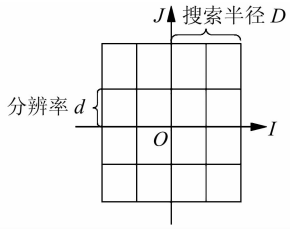

图 1　已知点个数与搜索半径、分辨率的关系

Fig. 1　Relationship of Given Points' Number, Radius and Resolution

2　实验结果与验证

2.1　实验方案

本文实验采用 EGM2008 地球重力场模型计算得到不同分辨率的格网重力异常数据,采用上文介绍的方法估计给定重力异常插值点误差(如 3σ 不超过 5 mGal,下文均以此值为例)时所需的已知数据的分辨率和误差,并利用实际内插算例对结果进行验证。

针对以上实验内容,设计实验方案及步骤如下:

1) 选择范围为 $1^\circ\times1^\circ$ 的某一区域,采用 EGM2008 模拟生成分辨率为 $1'\times1'$ 的重力异常点值格网数据,分别由分辨率为 $1'$ 的格网数据等间隔采样得到分辨率为 $2'\sim6'$ 的格网重力异常数据。

2) 计算该区域重力异常的局部协方差值,再利用高斯函数对这些局部协方差值进行拟合。

3) 利用本文介绍的方法计算出插值点误差随已知数据的分辨率及误差变化的结果,根据结果分析给定插值误差的约束条件。

4) 选择实验区域内一定数量的离散点作为待求点,利用加入不同水平噪声后的各种格网分辨率的重力异常数据进行内插计算,将这些待求点的内插结果与 EGM2008 计算的结果进行比较,统计出不同条件下的内插精度,验证步骤 3)结果的可行性。

步骤 3)需要确定已知数据对内插点的有效作用范围,即确定搜索半径 D。由于插值方法的实质是通过插值点周围已知点的信息采取适当加权得到插值点的重力异常值,从理论上讲,已知重力异常点与待求点的距离越远,其对插值点的影响也越小,甚至可以忽略,因此,在插值点影响区域内(以 R 为半径的圆内)的已知点才对插值结果有影响。以距离倒数权函数 $w(d)=1/d^2$ 为例,图 2 给出了权函数与距离的关系。由图 2 可

知，如果以量级为100 mGal的重力异常为例，33 km以外的已知点对插值的影响将小于0.1 mGal，所以文中所选的搜索半径为20′，即在图1中，$D=20'$。

2.2 实验结果与讨论

利用§2.1中的步骤1)～3)，通过对实验区域重力异常协方差值进行拟合，得到了该地形条件下的经验协方差函数，得到式(5)中两个参数值为 $C_0=698$，$A^2=40$，拟合曲线如图3所示。

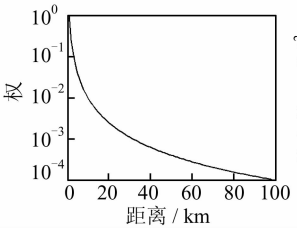

图2 距离倒数权函数的取值变化

Fig. 2 Inverse Distance Weights' Variation

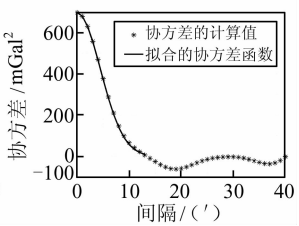

图3 重力异常协方差函数的拟合结果

Fig. 3 Covariance Function's Fitting Result

根据式(5)可计算出该地形条件下式(1)中 $\boldsymbol{C}_{\Delta g\Delta g}$ 和 $\boldsymbol{C}_{\Delta g'\Delta g}$ 的矩阵元素，并得到内插重力异常的误差估值，由此结果可分析插值误差与格网分辨率、观测误差之间的关系，从而研究插值误差不大于5 mGal(3σ)的约束条件，计算结果如图4所示。

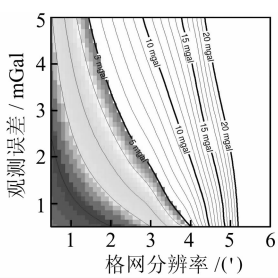

图4 最小二乘配置的误差估计

Fig. 4 Error Estimation of Least Squares Collocation

图4为文中所选区域的经验协方差函数计算得到的内插点精度与观测误差和数据分辨率之间的关系，图中的等值线表示待估点重力异常的误差值，等值线间距为1 mGal，其中满足 $3\sigma<5$ mGal的情况均用深色标出。可以看出，在该地区，为了满足重力异常插值精度在5 mGal以内，已知观测数据的分辨率不能低于4′；当分辨率为3′时，观测误差需优于2 mGal；当分辨率为2′时，观测误差需优于3 mGal，其中分辨率优于2′且观测误差优于2 mGal是比较可靠的组合。图4还反映出插值点误差会随着约束条件的变化(分辨率变低及观测误差增加)而迅速增加，误差等值线间距则表现为逐渐变密。

为了验证上述理论分析的合理性，本文进行了不同组合下的插值计算实验。理论上，采用最小二乘配置法进行内插有助于两种结果之间的一致性，但是该方法受协方差函数的影响较大，协方差函数不准确时，计算会有较大误差。因此，为了避免协方差误差的影响，这里选用精度较高、与最小二乘配置法比较类似的Kriging内插方法进行插值计算。在所选实验区域内，分别以1′～6′分辨率的格网数据作为已知数据，并模拟了不同大小的观测噪声(中误差分别为0.3 mGal、1～6 mGal)，计算了100个插值点的重力异常值，插值结果的精度统计列于表1，表中黑体标出了满足精度要求的条件组合。从表1可以看出，该地区内插精度若要满足 $3\sigma<5$ mGal的要求，观测精度必须优于2 mGal，分辨率需优于2′；当观测精度很高时，分辨率可以放宽到3′。

表1 利用Kriging方法得到的插值点误差(3σ)

Tab. 1 Accuracy on Interpolation Point by Kriging Algorithm(3σ)

观测精度 /mGal	格网分辨率/(′)					
	1	2	3	4	5	6
0.3	**0.673**	**1.650**	**4.804**	10.284	17.798	25.592
1	**2.088**	**2.162**	5.109	10.139	17.787	25.861
2	**4.169**	**4.585**	6.403	10.389	18.252	26.229
3	6.702	6.527	7.918	11.056	18.885	25.981
4	8.071	8.224	8.990	13.658	19.714	26.405
5	10.876	9.585	10.721	15.347	20.286	26.974
6	10.826	11.856	12.299	17.554	22.388	29.650

对比表1和图4可知，由理论公式给出的分析结果与插值实验给出的结果基本一致。对于所选区域，为了满足内插重力异常值的三倍中误差，即 $3\sigma<5$ mGal的条件，选择分辨率为2′、精度为2 mGal的格网数据是比较可靠的。由于理论公式是基于协方差函数完全准确的理想条件，由其分析结果得到的约束条件相比实际应用时需要的条件可能更宽松，故在应用该方法时，为增加可靠性，应采取比较保守的估计。

3 结 语

本文基于最小二乘配置误差估计公式和协方差函数，建立了重力异常内插点误差与已知数据分辨率、数据精度之间的关系。实验结果表明，本文方法具有可行性。使用该方法进行分析时，要求已知准确的协方差函数，但在实际应用时往往

不知道协方差函数。幸运的是,目前 EGM2008 地球重力场模型对真实地球重力场有了很好的逼近,可以先利用它来拟合协方差函数。但是为了得到更加可靠的约束条件,今后有必要进一步研究协方差模型误差对估计结果的影响。

参 考 文 献

[1] 陈俊勇,李建成,宁津生,等. 全国及部分省市地区高精度、高分辨率大地水准面的研究及其实施[J]. 武汉大学学报·信息科学版,2006,31(4):283-288

[2] 汪海洪,罗志才,罗佳,等. 数据分辨率对最小二乘配置解的影响[J]. 大地测量与地球动力学,2006,26(4):45-48

[3] Kotsakis C. The Multiresolution Character of Collocation [J]. Journal of Geodesy, 2000, 74(3/4): 275-290

[4] 张利明,李斐,陈武. 重力数据分辨率对 GPS /重力边值问题的影响研究[J]. 武汉大学学报·信息科学版,2007,32(6):523-526

[5] 钟波,汪海洪,罗志才,等. 顾及观测噪声和数据分辨率的线性估计方法研究[J]. 武汉大学学报·信息科学版,2009,34(3):273-276

[6] 陈俊勇. 高精度局域大地水准面对布测 GPS 水准和重力的要求[J]. 测绘学报,2001,30 (3):189-191

[7] 陈俊勇. GPS 水准网格间距的设计[J]. 大地测量与地球动力学,2004,24 (1):1-3

[8] 孙凤华,孔维兵,李智慧,等. 我国陆地均匀重力测量补点问题的研究[J]. 武汉大学学报·信息科学版,2001,26 (4):349-353

[9] 孙凤华,薛冰,郭玉良,等. 我国陆海新一代平均重力异常基本分辨率等问题的研究[J]. 海洋测绘,2005,25(1):1-5

[10] 赫尔墨特·莫里兹. 高等物理大地测量学[M]. 北京:测绘出版社,1984:50-68

[11] 章传银,丁剑,晁定波. 局部重力场最小二乘配置通用表示技术[J]. 武汉大学学报·信息科学版,2007,32(5):431-434

[12] 邹贤才,李建成. 最小二乘配置方法确定局部大地水准面的研究[J]. 武汉大学学报·信息科学版,2004,29(3):218-222

第一作者简介:李振海,博士生,主要研究方向为物理大地测量学及地球重力场信息的可视化。

E-mail:lizhenhai666@163.com

Requirements for Gravity Data Within the Given Accuracy of the Interpolated Gravity Anomaly

LI Zhenhai[1]　*LUO Zhicai*[1,2,3]　*WANG Haihong*[1,2]　*ZHONG Bo*[1,2]

(1　School of Geodesy and Geomatics, Wuhan University, 129 Luoyu Road, Wuhan 430079, China)

(2　Key Laboratory of Geospace Environment and Geodesy, Ministry of Education, Wuhan University, 129 Luoyu Road, Wuhan 430079, China)

(3　State Key Laboratory of Information Engineering in Surveying, Mapping and Remote Sensing, Wuhan University, 129 Luoyu Road, Wuhan 430079, China)

Abstract: To deduce required resolution and accuracy of grid data from the interpolation error of gravity anomaly is a typical inverse problem. Based on the error estimation formula of least squares collocation, the contribution of the resolution and accuracy of grid data to the interpolation error is discussed. A method is proposed to determine the necessary resolution and accuracy when the interpolation error is given. To assess the method, interpolation experiments are performed using EGM2008 gravity data with various resolution and accuracy. The results are consistent with those derived by the method proposed in this paper, which validates the feasibility of the method.

Key words: gravity anomaly; interpolation; least squares collocation; resolution; covariance

About the first author: LI Zhenhai, Ph.D candidate, majors in physical geodesy and information visualization of Earth's gravity field. E-mail: lizhenhai666@163.com