

地球外部引力场引起卫星间距离变化的数值模拟研究

宁津生¹ 罗 佳² 汪海洪²

(1 武汉大学地球空间环境与大地测量教育部重点实验室, 武汉市珞喻路 129 号, 430079)

(2 武汉大学测绘学院, 武汉市珞喻路 129 号, 430079)

摘要: 卫星跟踪卫星(SST)被认为是解决目前地球重力场探测领域中所面临一系列问题的有效方法之一。随着 CHAMP、GRACE 等 SST 卫星重力任务的实施, 卫星跟踪卫星方法已经进入实用阶段。以 GRACE 卫星重力计划为参照, 利用数值模拟方法研究了由于地球外部引力场导致的卫星间距离变化的规律, 得出了相应结论。本研究方法和结论可以为进一步的研究工作, 特别是我国未来可能发展的利用 SST 探测地球重力场的卫星计划提供参考。

关键词: SST; GRACE; 地球重力场; 数值模拟

中图法分类号: P223.0; P228

2002 年, 搭载了精密星间 K 波段测距仪、星载 GPS 接收机、高精度微加速度计的 GRACE (gravity recovery and climate experiment) 卫星对的成功发射, 标志着地球重力场探测向高精度和高分辨率迈出了重要的一步。GRACE 的空间部分由相距约 220km 的 GRACE 卫星对组成, 在进行低低模式 (SST-II: satellite-to-satellite tracking in low-low) 卫星跟踪卫星的同时, 对 GPS 卫星实施高低模式 (SST-hl: satellite-to-satellite tracking in high-low) 观测。测定地球重力场精细结构及中、长波重力场随时间的变化是 GRACE 计划的主要目标之一。GRACE 可以在 30d 的正常运行期间, 提供超过过去 30a 相关研究的信息量的总和^[1]。

在进行 GRACE 计划 SST 方面的研究时, 需要获取模拟的 SST 观测数据, 而 SST 观测数据的模拟必然涉及重力场模型的使用。本文通过对不同阶次、两种地球重力场模型生成模拟 SST 观测量的分析, 得到了一个较优的模拟方案。此外, 还从地球外部引力场与 SST 的关系得出了有关 SST 恢复重力场性能的参考结果。

1 SST 卫星间距离观测量

一对基本处于同一轨道、相距一定距离并可实现精密星间测距的 GRACE 卫星在地心(似)惯性系中的位置矢量分别为 \vec{r}_1 和 \vec{r}_2 。如图 1 所示, 两颗卫星的地心角为 Ψ 。如果卫星处于极轨道($i \approx 0$), 则 $\Psi = 2\arcsin(\rho/(2r))$ 。两卫星绕地球运行的平均角速率相同, 而 $\vec{n} = \sqrt{GM/a^3}$; 同时, 地球以平均角速率 $\vec{\omega}_e$ 绕自转轴在惯性空间中自转。容易理解, 两卫星具有相同的瞬时经度, 但它们的星下点轨迹是不同的, 某一历元两卫星的星下点在南北方向差 Ψ rad, 在东西方向差 $\vec{\omega}_e \vec{n}^{-2} \Psi$ rad。

GRACE-B 卫星 s_2 与 GRACE-A 卫星 s_1 之间的距离为视线矢量 \vec{r}_{12} (line of sight vector), 其变率即是相对视线速度 $\dot{\vec{r}}_{12}$ (relative line of sight velocity)。设卫星 s_1 和 s_2 之间的距离为 ρ , 则有:

$$\rho = \vec{r}_{12} \cdot \hat{e}_{12} \quad (1)$$

式中, $\vec{r}_{12} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$, \vec{r}_i 是卫星 i 的地心位置矢

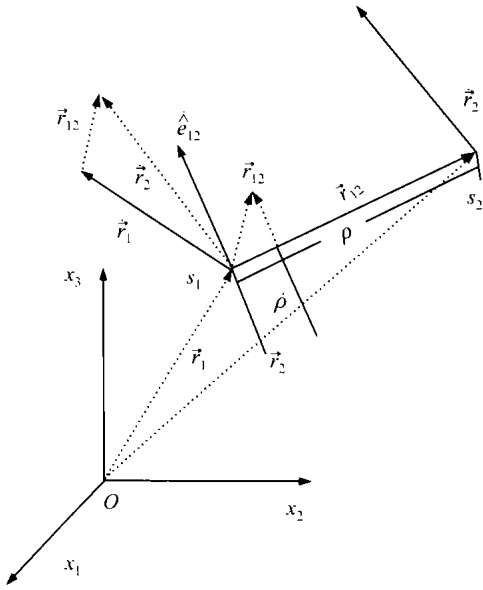


图 1 SST 观测量

Fig. 1 Measurement of SST

量; \hat{e}_{12} 是 \vec{r}_{12} 的单位方向矢量:

$$\hat{e}_{12} = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|} = \frac{\vec{r}_{12}}{\rho} \quad (2)$$

再将 ρ 对时间求导数可以得到 $\dot{\rho}$ 。

在不引起混淆的前提下, 以下也称 ρ 为相对视线速度 (LSV, light of sight velocity), 称 $\dot{\rho}$ 为相对视线加速度 (LSA, light of sight acceleration)。

直接建立 $\rho, \dot{\rho}$ 和 $\ddot{\rho}$ 与地球重力场位系数之间的关系是十分困难的, 而 Kaula 的方法可以利用轨道根数表达平均长期椭圆运动的摄动^[2]。Kaula 解提供了基于频率域的轨道根数摄动与地球重力场位系数的关系。如果选择参考轨道的平近点角 M 为两卫星连线中点处, GRACE-A 与 GRACE-B 卫星的平近点角就可以表达为 $M_1 = M + \alpha/2$ 和 $M_2 = M - \alpha/2$ 。基于 Kaula 的方法, 距离和距离变率的摄动量 $\Delta\rho, \Delta\dot{\rho}$ 可以表达为卫星对中点处位置的径向、切向和法向的摄动 (RTN), 进而 GRACE 卫星对之间的距离和距离变率的摄动可以表达为^[3]:

$$\Delta\rho = \sum_{nmpq} \rho_{nmpq} \cos \Psi_{nmpq} \quad (3)$$

$$\Delta\dot{\rho} = \sum_{nmpq} \dot{\rho}_{nmpq} \sin \Psi_{nmpq} \quad (4)$$

即对下标 n, m, p, q 求和, 其中,

$$\rho_{nmpq} = 2 A_{nm} \sum_{s=s_1}^{s_2} F_{nmpqs}^\rho / \Psi_{nmp(q-s)} \quad (5)$$

$$\dot{\rho}_{nmpq} = 2 A_{nm} \sum_{s=s_1}^{s_2} F_{nmpqs}^{\dot{\rho}} / \Psi_{nmp(q-s)} \quad (6)$$

$$F_{nmpqs}^\rho = \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{L_{nmpq}\alpha}{2} P_{nmpqs}^R + \cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{L_{nmpq}\alpha}{2} P_{nmpqs}^T \quad (7)$$

$$F_{nmpqs}^{\dot{\rho}} = \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{L_{nmpq}\alpha}{2} [V_{nmpqs}^R + P_{nmpqs}^T + (P_{nmpqs}^R + P_{nmpqs}^T) \cos^2(\frac{\alpha}{2})] + \cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{L_{nmpq}\alpha}{2} [V_{nmpqs}^T - P_{nmpqs}^R - P_{nmpqs}^R \cos^2(\frac{\alpha}{2}) - P_{nmpqs}^T \sin^2(\frac{\alpha}{2})] \quad (8)$$

$$\Psi_{nmpq} = (n - 2p)\omega + (n - 2p + q)M + m(\Omega - \theta_G) - (\pi_{nm} + \epsilon_{nm}) \quad (9)$$

$$\Psi_{nmpq} = (n - 2p)\omega + (n - 2p + q)M + m(\Omega - \theta_g) \quad (10)$$

式中,

$$A_{nm} = \sqrt{C_{nm}^2 + S_{nm}^2} \quad (11)$$

$$L_{nmpq} = n - 2p + q$$

$$\epsilon_{nm} = \arctan(S_{nm} / C_{nm})$$

$$\pi_{nm} = \text{mod}(n + m, 2)\pi/2$$

其中, C_{nm} 和 S_{nm} 是地球引力场球谐展开系数; ω, Ω, M 和 θ_g 分别是对应的轨道根数和格林尼治恒星时 (GST)。

进而可以得到 LSV 的摄动 $\Delta\rho$ 与地球重力场引力位系数 C_{nm} 和 S_{nm} 之间的关系, 从而通过 SST-II 观测量确定地球重力场模型。观测方程为:

$$\begin{pmatrix} \Delta\rho_1 \\ \Delta\rho_2 \\ \vdots \\ \Delta\rho_j \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_k \end{pmatrix} \quad (12)$$

式中, $\Delta\rho_1, \dots, \Delta\rho_j$ 是 LSV 观测量的摄动; β_1, \dots, β_k 是需要求定的地球重力场位系数; A 为由式 (6) 到式 (12) 构造的矩阵。由于在式 (4) 和式 (5) 中, 地球重力场引力位系数是隐含的, 并且需要经多次求和计算, 所以构造矩阵 A 是一复杂的过程。由式 (12) 知, 地球重力场模型位系数可以直接与 LSV 观测量的摄动量联系, 当剔除了其他摄动因素的影响之后, 可以利用 LSV 观测量确定地球重力场。

2 卫星间距离与地球外部引力场关系的数值模拟

地球外部引力是地球卫星得以运行的主要动力, 由于地球内部质量和外部形状的不均匀性, 仅仅使用二体问题方法描述 GRACE 的卫星运动, 不能满足对地球卫星在地球外部引力环境下运动的高精度描述, 特别是 GRACE 卫星轨道较低, 地

球质量分布的不均匀性对卫星运动会产生更大的影响。以下将通过截取到不同阶次的地球引力场模型数值模拟 SST 观测测量,并对 SST 观测测量的变化规律进行分析。

以 GRACE 卫星为例,利用表 1 的初始数据模拟了 1d 的卫星间距离观测测量 LSD、LSV 和 LSA。各种观测测量在 1d 中的变化规律如图 2 所示,图 2(a)是由 70×70 阶次 JGM-3 作为参考模型模拟的 1d SST-II 观测测量的变化趋势图;图 2(b)是由 360×360 阶次 EGM96 作为参考模型模拟的 1d SST-II 观测测量的变化趋势图。两者比较可以看出,观测测量变化的趋势并没有本质

的差别,而 LSA 和 LSV 相对于 LSD 显然包含了更多的高频信息。

表 1 GRACE-A 和 GRACE-B 的初始参数

Tab.1 Initial Status of GRACE-A and GRACE-B

	GRACE-A	GRACE-B
历元/MJD	52 732.000 000 00	52 732.000 000 00
半长轴/km	6 857.010 120 85	6 857.010 120 85
偏心率	0.001 707 20	0.001 707 20
轨道倾角/(°)	89.007 800 00	89.007 800 00
近地点角/(°)	304.181 700 00	304.181 700 00
升交点角/(°)	249.222 400 00	249.222 400 00
平近点角/(°)	112.026 100 00	110.187 800 00
星间距离/km	219.857 788 6	

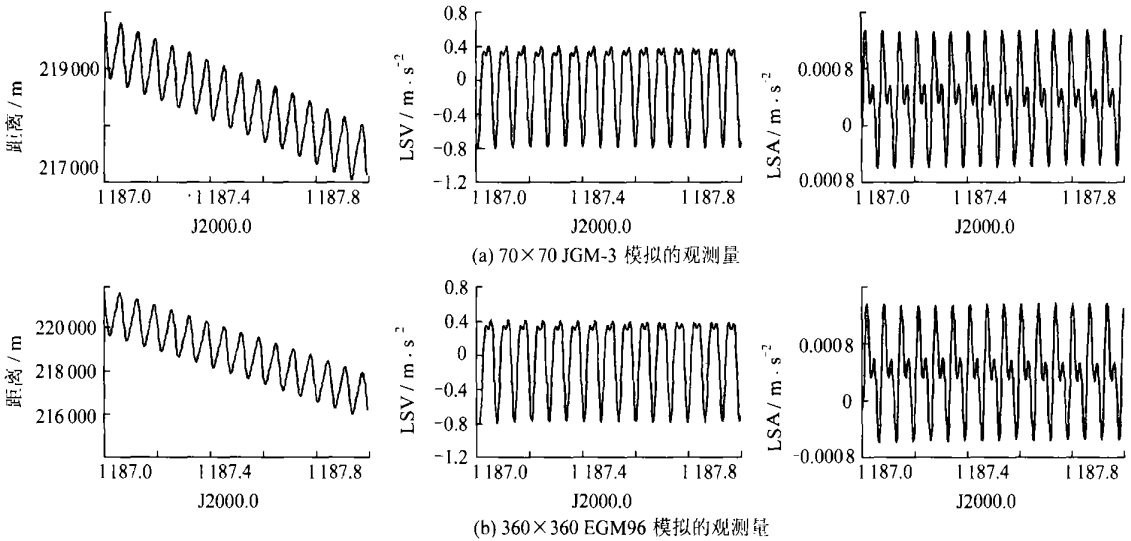


图 2 70×70 JGM-3 和 360×360 EGM96 模拟的 SST-II 观测测量

Fig.2 Measurement of SST-II Based on 70×70 JGM-3 and 360×360 EGM96

图 3 显示了基于截取到不同阶次(8、36、50 和 70 阶次)的 JGM-3 模型 SST 观测测量的互差。可以看出,随着 JGM-3 模型截断阶数的提高,3 种观测测量的模拟数据的偏差都呈明显减小的趋势,且偏差的离散程度也变小。另外,LSD 的偏差具有随着外推时间增加而线性增大的趋势,而 LSV 和 LSA 随外推时间增加而增大的趋势并不明显。这表明 LSV 和 LSA 相对于 LSD 对较低频地球引力场引力信号的响应程度要低于 LSD。所以,在进行 SST 数据模拟时,较高阶次的地球引力场模型是必需的,1d 之内,50 阶与 70 阶模型模拟数据的偏差对于 LSV 在 ±0.02m/s 范围内振荡,对于 LSA 在 ±4×10⁻⁵m/s²范围内振荡。这一量级的变化已经完全可由现有的 KBR 系统观测。

另外,为了研究不同地球引力场模型对 SST 数值模拟的影响,比较了 70×70 的 JGM-3 和截

断到 70×70 的 EGM-96 所模拟数据的差异。如图 4 所示,1d 之内由于模型的差异,模拟的观测数据的偏差对于 LSV 在 ±0.002m/s 范围内振荡,对于 LSA 在 ±4×10⁻⁶m/s²范围内振荡,LSD 的平均偏差也在 10m 左右。这说明当前高精度的地球引力场模型之间的差异还比较大,这种差异对于 SST 观测测量的模拟仍然不能忽略,因此在生成模拟数据时,最好基于某一种或某一系列进行,以减小由于模型不同带来的偏差影响。

如图 5(a)和 5(b)所示,当使用截断到 70 阶次至 150 阶次的重力场模型进行数值模拟时,LSD、LSV 和 LSA 的互差都已经比使用低于 70 阶模型进行模拟时的互差有所下降,这也进一步说明了使用高于 70 阶的模型是必需的。另外,比较图 5(c)~5(g)可以看出,200 阶、250 阶、360 阶的 LSD、LSV 和 LSA 互差有摆动的趋势。这一方面是由于到了高阶次,球谐函数的收敛性减弱;

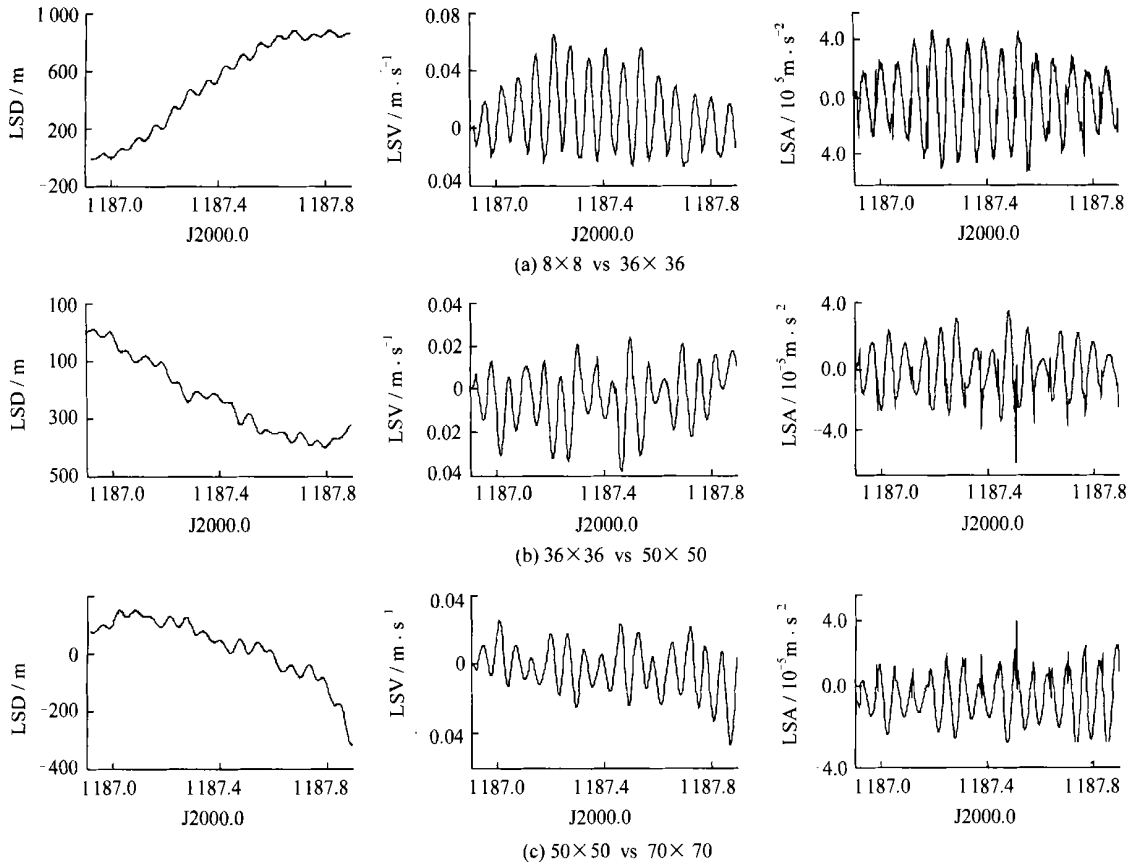


图 3 JGM-3 模拟的 SST-II 观测量比较

Fig. 3 Comparison Between Measurements of SST-II JGM-3

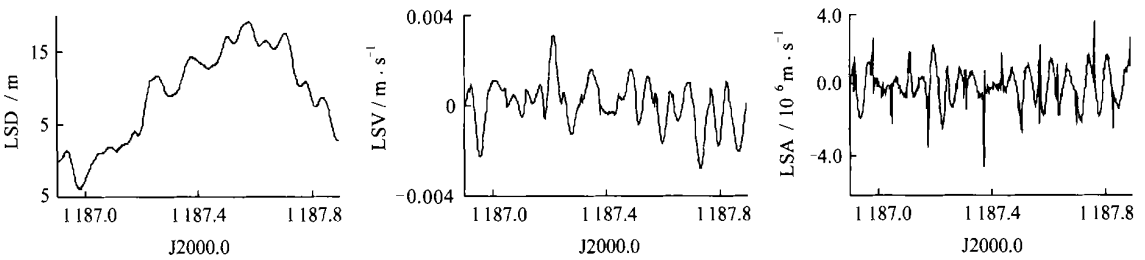


图 4 JGM-3 与 EGM96(70x70)模拟的 SST-II 观测量比较

Fig. 4 Comparison Between Measurements of SST-II Simulated by JGM-3 and EGM96

另一方面也可能是由于 SST 对超过 200 阶的信号不够敏感造成的。图 5(b)显示, EGM96 模型截断到 200 阶次与 360 阶次的模拟数据互差最小,更直观地体现了上述结论。

图 6 是基于 360x360 阶次 EGM96 的 180s 和 10s 采样率的 SST 观测量的频谱图,图中细线表示 S_E ,粗线表示 σ^2 。可以发现,高于 30 阶次后, LSD 的噪声谱强于信号的能量谱;而 LSV 的信号和噪声谱在随着阶次的增高而逐渐趋于重合;LSA 的信号和噪声谱在 30~70 阶次会出现信号弱于噪声的情况,超过 80 阶次后又随着阶次的增加,信号的能量又逐渐强于噪声能量,表现了 LSA 在高频部分的优良特性。只是随着阶次的增加,LSA 信号本

身较弱,如果有较强的其他噪声,将使 LSA 的这一特性得不到发挥。比较图 6(a)和 6(b)可以看出, SST 的数据采样率对于 SST 观测量恢复地球重力场的能力也是至关重要的。

3 结 语

1)在进行 SST 数值模拟时,高阶次的地球引力场模型是必需的。由 8 阶次到 200 阶次间的比较结果可以看出,不符值具有减小的趋势。

2)由于不同模型之间具有差异,在进行数据模拟时,不同重力场模型模拟的数据最好不要共同处理。此外,还需要考虑高阶重力场模型部分

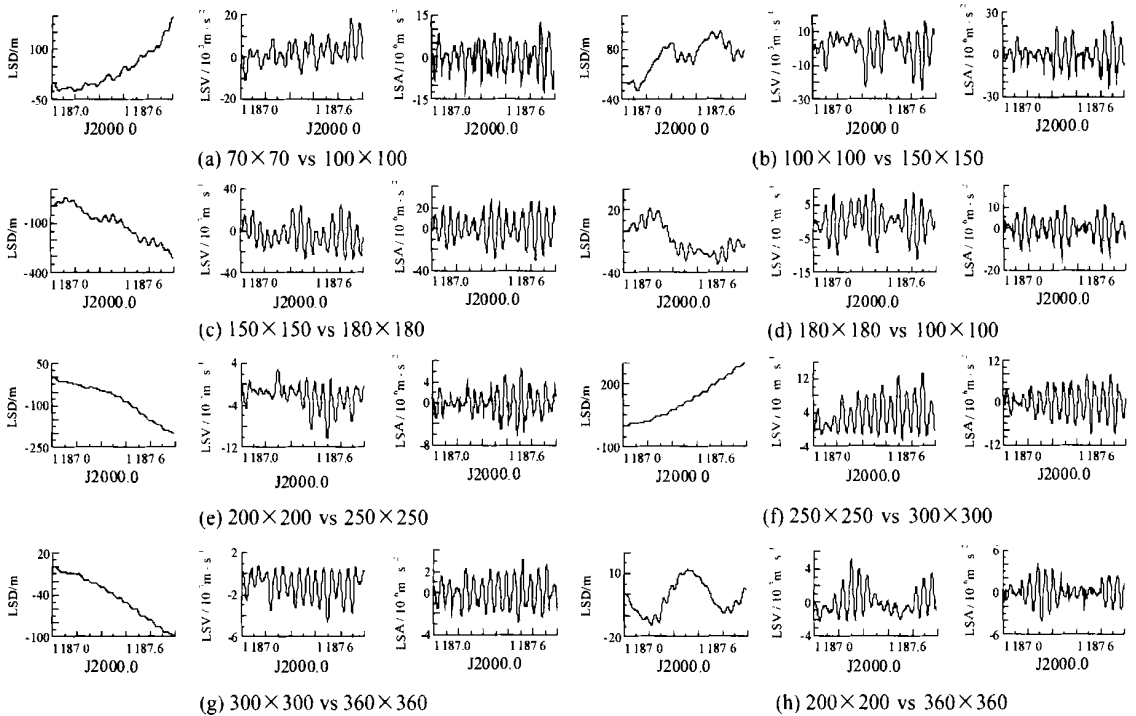


图5 EGM-96 模拟的 SST-II 观测量比较

Fig. 5 Comparison Between Measurements of SST-II Based on EGM-96

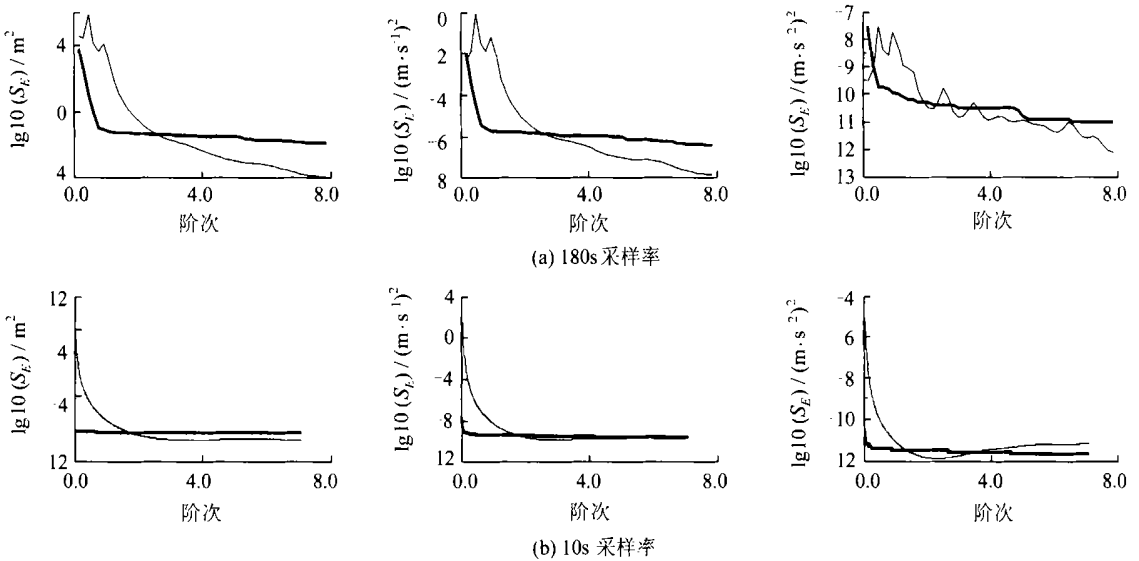


图6 EGM-96(360×360)模拟的 SST 180s 和 10s 观测量频谱

Fig. 6 Spectrum of SST 180s and 10s Measurement Based on EGM-96 (360×360)

的一些隐含问题,如使用 EGM96 模型模拟 SST 观测量时,300 阶次的模拟数据与 360 阶次的模拟数据的一致性比 200 阶次的模拟数据差的反常现象。

3)EGM96 模型截断到 200 阶次与 360 阶次的模拟数据互差最小,这一方面是由于到了高阶次,球谐函数的收敛性减弱;另一方面也可能是由于 SST 对超过 200 阶的信号不够敏感造成的。所以建议使用截断到 200 阶次的 EGM96 模型进

行类似 GRACE 计划的 SST 观测量的模拟。

4)LSD、LSV 和 LSA 观测量具有不同的频谱特性。在恢复较高阶次的地球重力场模型时,需要考虑使用 LSV 和 LSA,选择哪一类观测量还需要进一步深入研究。

参 考 文 献

1 GRACE, <http://www.csr.utexas.edu/grace/>, 2003
 2 Kaula W M. Theory of Satellite Geodesy. Waltham-

- London: Blaisdell Publishing Company, 1966
- 3 Cheng M K. Gravitational Perturbation Theory for InterSatellite Tracking. *Journal of Geodesy*, 2002(76): 169~185
 - 4 GfZ. Announcement of Opportunity for CHAMP. GfZ-Potsdam, 2001
 - 5 Kirschner M, Montenbruck O, Bettadpur S. Flight Dynamics Aspects of the GRACE Formation Flying. The 2nd International Workshop on Satellite Constellations and Formation Flying, Haifa, Israel, 2001
 - 6 Mazanek D D, Kumar R R, Qu M, et al. Aerothermal Analysis and Design of the Gravity Recovery and Climate Experiment (GRACE) Spacecraft. NASA/TM-2000-210095, 2000
 - 7 宁津生. 跟踪世界发展动态 致力地球重力场研究. 武汉大学学报·信息科学版, 2001, 26(6): 471~474
 - 8 陈俊勇, 文汉江, 程鹏飞. 中国大地测量学发展的若干问题. 武汉大学学报·信息科学版, 2001, 26(6): 475~482
 - 9 沈云中. 应用 CHAMP 卫星星历精化地球重力场模型的研究: [博士学位论文]. 武汉: 中国科学院测量与地球物理研究所, 2000
 - 10 张传定. 卫星重力测量——基础、模型化方法与数据处理算法: [博士学位论文]. 郑州: 郑州信息工程大学, 2000
-
- 第一作者简介: 宁津生, 教授, 博士生导师, 中国工程院院士。现主要从事物理大地测量的研究。代表成果: 我国地球重力场模型研制和大地水准面的精化等。
E-mail: jsning@wtusm.edu.cn

Relationship Between Earth Gravity Field and SST by Numerical Simulation

NING Jinsheng¹ LUO Jia² WANG Haihong²

(1 Key Laboratory of Geospace Environment and Geodesy, Ministry of Education, Wuhan University, 129 Luoyu Road, Wuhan, China, 430079)

(2 School of Geodesy and Geomatics, Wuhan University, 129 Luoyu Road, Wuhan, China, 430079)

Abstract: Satellite-to-satellite tracking can provide a new technique for the earth gravity field determination. To discover the relationship between the earth gravity field and SST observation, the basic research of SST simulation, JGM-3 and EGM96 are adopted and some numerical simulations are put in practice. The variations of SST observation are compared with the different degree and order and two earth gravity models JGM-3 (8×8 , 36×36 , 50×50 , 70×70) and EGM96 (70×70 , 100×100 , 150×150 , 180×180 , 200×200 , 250×250 , 300×300 , 360×360). In these simulation results, the higher degree and order earth gravity model can provide better simulation results. At the same time, the results simulated by the two different models have obvious biases.

Key words: SST; GRACE; earth gravity field; numerical simulation

About the first author: NING Jinsheng, professor, Ph. D supervisor, member of Chinese Academy of Engineering. His research field is physical geodesy. His typical achievements are the development of the earth gravity field model and geoid refining of China, etc.

E-mail: jsning@wtusm.edu.cn

(责任编辑: 平子)