文章编号:1671-8860(2009)03-0273-04　　**文献标志码**:A

顾及观测噪声和数据分辨率的线性估计方法研究

钟　波[1,2]　汪海洪[1,2]　罗志才[1,2]　崔立鲁[1]

(1　武汉大学测绘学院,武汉市珞喻路 129 号,430079)
(2　武汉大学地球空间环境与大地测量教育部重点实验室,武汉市珞喻路 129 号,430079)

摘　要:基于最小均方误差准则的频域形式,探讨了观测噪声和数据分辨率对估计结果的综合影响,给出了频域内顾及观测噪声和数据分辨率的最优线性估计及其误差功率谱的一般公式。算例表明,当数据分辨率较高时,观测噪声对估计精度占有主要的影响;当数据分辨率较低时,估计误差主要表现为采样不足引起的混叠误差,观测精度的提高对估计结果的改善非常有限。研究成果可为重力场精化中技术方案的设计提供参考。

关键词:观测噪声;数据分辨率;最小均方误差准则;误差功率谱;线性估计

中图法分类号:P207.2;P223.0

在地球重力场的实际研究中,只能用离散的观测数据对重力场进行逼近,重力场逼近的精度与观测噪声和重力数据的分辨率有关[1]。因此,在建立地球重力场模型或精化大地水准面时,通常需要在给定的精度和分辨率水平下合理设计观测数据的施测方案,包括观测精度与采样密度,以达到投入少、收效大的目的。若能建立观测噪声、数据分辨率与待估量之间的综合误差响应关系,则可为重力和 GPS 水准等数据观测方案的优化设计提供重要的参考。

从频域的角度看,连续信号的离散采样会对估计结果造成混叠误差,并且观测数据的分辨率越低,引起的混叠误差就越大。针对这一问题,文献[2-8]都进行了研究,本文在上述研究的基础上进一步讨论了观测噪声和数据分辨率对估计结果的综合影响,并在最小均方误差准则的频域形式下,给出了频域内顾及观测噪声和数据分辨率的最优线性估计及其误差功率谱的一般公式。

1　基本原理

在确定地球重力场时,实际观测数据难以避免地带有噪声,并且不能满足理论上连续分布的要求,因此,通常采用带有噪声的格网化观测数据,在某种最优估计准则下估计待估重力场信号。格网化观测数据一般可表示为:

$$d(nh_x,mh_y)=g(nh_x,mh_y)+v(nh_x,mh_y) \tag{1}$$

式中,$n,m\in Z$;$g(nh_x,mh_y)$为无噪声的格网观测值;$v(nh_x,mh_y)$为随机观测噪声;$h_x\times h_y$为数据采样的分辨率水平。

假设在实平面上具有紧支性的待估信号仅在矩形区域 $0\leqslant x\leqslant X$、$0\leqslant y\leqslant Y$ 内,则式(1)中的整数指标 n、m 分别限制在范围 $0\leqslant n\leqslant N-1$ 和 $0\leqslant m\leqslant M-1$ 内,N、M 分别表示 x、y 方向的格网观测值的个数。紧支性条件下,区域 $0\leqslant x\leqslant X$、$0\leqslant y\leqslant Y$ 以外并无观测值,相应的观测噪声可视为零,则无噪声观测值、随机观测噪声和实际观测值的二维傅立叶变换可分别表示为[9]:

$$\overline{G}(\omega_x,\omega_y)=\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{M-1}g(nh_x,mh_y)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(nh_x\omega_x+mh_y\omega_y)} \tag{2}$$

$$\overline{V}(\omega_x,\omega_y)=\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{M-1}v(nh_x,mh_y)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(nh_x\omega_x+mh_y\omega_y)} \tag{3}$$

$$\overline{D}(\omega_x,\omega_y)=\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{M-1}d(nh_x,mh_y)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(nh_x\omega_x+mh_y\omega_y)}=\overline{G}(\omega_x,\omega_y)+\overline{V}(\omega_x,\omega_y) \tag{4}$$

在线性移不变条件下,顾及观测噪声和数据分辨率的未知信号最优线性估值的卷积形式

收稿日期:2009-01-15。

项目来源:国家自然科学基金资助项目(40704003);国家 973 计划资助项目(2007CB714405);国家教育部新世纪优秀人才支持计划资助项目(NCET-07-0635);武汉大学地球空间环境与大地测量教育部重点实验室开放研究基金资助项目(06-12,07-14)。

为[10]：

$$\hat{g}(x,y)=\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{M-1}d(nh_x,mh_y)\xi_h(x-nh_x,y-mh_y) \quad (5)$$

式中，$\xi_h(x,y)$是在某种最优估计准则下确定的二维滤波核，它同时考虑了观测噪声和数据分辨率对估计结果的影响，下标 h 表明滤波核与观测数据的分辨率有关。

2 最优滤波核的确定

由式(5)引起的估计误差可分解为两个部分：

$$e(x,y)=g(x,y)-\hat{g}(x,y)=e_h(x,y)+e_v(x,y) \quad (6)$$

式中，$e_h(x,y)$为离散采样引起的混叠误差；$e_v(x,y)$为观测噪声引起的估计误差：

$$e_h(x,y)=g(x,y)-\tilde{g}(x,y) \quad (7)$$

$$e_v(x,y)=\tilde{g}(x,y)-\hat{g}(x,y) \quad (8)$$

当观测值无误差时，未知信号的估值 $\tilde{g}(x,y)$依赖于观测值的分辨率，它可通过某种内插滤波得到。在线性移不变条件下，$\tilde{g}(x,y)$可表示为：

$$\tilde{g}(x,y)=\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{M-1}g(nh_x,mh_y)\varphi_h(x-nh_x,y-mh_y) \quad (9)$$

式中，$\varphi_h(x,y)$为依赖于数据分辨率的内插滤波核，它是在混叠误差 $e_h(x,y)$的均方差为最小时求得的[7,8]。

式(5)中的最优二维滤波核 $\xi_h(x,y)$可在如下最小均方误差准则的频域形式下求得，即

$$P_{e_v}(\omega_x,\omega_y)=E\{|E_v(\omega_x,\omega_y)|^2\}=\min \quad (10)$$

其中，$E_v(\omega_x,\omega_y)$为 $e_v(x,y)$的傅立叶变换；$P_{e_v}(\omega_x,\omega_y)$为相应估计误差的平均功率谱。求解式(10)可得到最优滤波核 $\xi_h(x,y)$，其频域形式为[10]：

$$\Xi_h(\omega_x,\omega_y)=\frac{|\bar{G}(\omega_x,\omega_y)|^2}{|\bar{G}(\omega_x,\omega_y)|^2+\bar{P}_v(\omega_x,\omega_y)}\cdot\Phi_h(\omega_x,\omega_y)=\bar{W}(\omega_x,\omega_y)\Phi_h(\omega_x,\omega_y) \quad (11)$$

式中，$\Phi_h(\omega_x,\omega_y)$为内插滤波核 $\varphi_h(x,y)$的傅立叶变换；$\bar{P}_v(\omega_x,\omega_y)$为噪声的功率谱密度，可由下式计算：

$$\bar{P}_v(\omega_x,\omega_y)=E\{|\bar{V}(\omega_x,\omega_y)|^2\} \quad (12)$$

由式(11)可知，顾及观测噪声和数据分辨率的最优滤波器可由两个级联的子滤波器组成，即一种是具有降噪作用的噪声滤波器 $\bar{W}(\omega_x,\omega_y)$，另一种是基于某种内插函数获得连续输出信号的内插滤波器 $\Phi_h(\omega_x,\omega_y)$，二者的级联结构可参见文献[10]。

可以看出，噪声滤波器 $\bar{W}(\omega_x,\omega_y)$具有 Wiener 滤波类似的信噪比结构。由式(11)可得：

$$\bar{W}(\omega_x,\omega_y)=\frac{|\bar{G}(\omega_x,\omega_y)|^2/NM}{|\bar{G}(\omega_x,\omega_y)|^2/NM+\bar{P}_v(\omega_x,\omega_y)/NM}=\frac{\bar{A}(\omega_x,\omega_y)}{\bar{A}(\omega_x,\omega_y)+\bar{B}(\omega_x,\omega_y)} \quad (13)$$

式中，NM 为格网观测值的总数；函数 $\bar{A}(\omega_x,\omega_y)$和 $\bar{B}(\omega_x,\omega_y)$分别为以下连带序列的傅立叶变换：

$$a(nh_x,mh_y)=\frac{1}{NM}\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{l=0}^{M-1}g(kh_x,lh_y)\cdot g((k+n)h_x,(l+m)h_y) \quad (14)$$

$$b(nh_x,mh_y)=\frac{1}{NM}\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{l=0}^{M-1}\sigma_v\cdot[(kh_x,lh_y)((k+n)h_x,(l+m)h_y)] \quad (15)$$

式中，序列 $a(nh_x,mh_y)$为无噪声观测值在分辨率为 $h_x\times h_y$时的离散协方差函数；序列 $b(nh_x,mh_y)$是噪声的广义离散协方差函数；$\sigma_v[(\cdot)(\cdot)]$表示任意两点的协方差。

若取 $\varphi_h(x,y)=\varphi(x/h_x,y/h_y)$，则由式(11)引起的估计误差的平均功率谱为[10]：

$$P_{e_v}(\omega_x,\omega_y)=(h_xh_y)^2\bar{W}(\omega_x,\omega_y)\times\bar{P}_v(\omega_x,\omega_y)|\Phi(h_x\omega_x,h_y\omega_y)|^2 \quad (16)$$

由式(16)可知，估计误差与观测噪声和数据的分辨率水平有关。

3 算例与分析

以一个一维的模拟计算为例，初步分析观测噪声和数据分辨率对估计结果的影响。假设重力异常的协方差函数为：

$$C(x)=20.0e^{-x^2/16} \quad (17)$$

采用上述协方差函数，根据文献[11]中的模拟方法模拟出大地水准面上某段长为 512 km 断面上的重力异常。以模拟的重力异常为真值，用间隔 h =1 km、2 km、4 km 分别对真值进行采样，得到 3 组无观测噪声的重力异常观测值。同时，在每一种采样间隔的观测值中加入均值为 0、方差 σ^2 分别为 1.0 mGal^2、4.0 mGal^2 和 16.0 mGal^2 的高斯白噪声序列，连同无观测噪声的数据，共得到 12 组重力异常观测值，分别利用模拟的 12 组观测数据来估计原重力异常。图 1 给出了上述不同观测噪声和分辨率水平时重力异常的估计误差曲线，表 1 为相应的重力异常估计误差的统计结果。

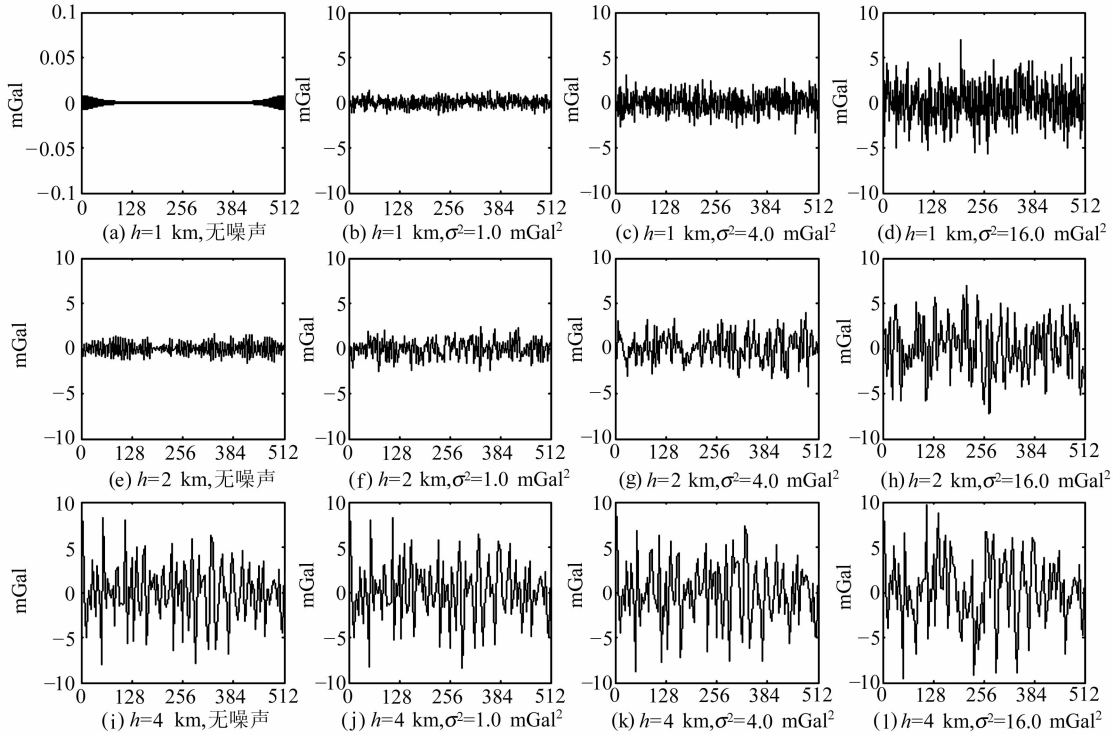

图 1　不同观测噪声和分辨率水平时重力异常的估计误差

Fig. 1　Estimated Errors of Gravity Anomaly at Different Noise and Resolution Levels

表 1　不同观测噪声和分辨率水平时估计误差的统计表

Tab. 1　Statistics of Estimated Errors at Different Noise and Resolution Levels

	$h=1$ km 的分辨率噪声方差				$h=2$ km 的分辨率噪声方差				$h=4$ km 的分辨率噪声方差			
	0	1.0 mGal²	4.0 mGal²	16.0 mGal²	0	1.0 mGal²	4.0 mGal²	16.0 mGal²	0	1.0 mGal²	4.0 mGal²	16.0 mGal²
最大值/mGal	0.01	1.42	3.06	6.95	1.58	2.36	3.99	6.93	8.21	8.19	8.42	9.66
最小值/mGal	−0.01	−1.36	−3.49	−5.68	−1.67	−2.58	−4.21	−7.27	−8.01	−8.40	−8.80	−9.49
平均值/mGal	0.00	0.04	−0.02	0.00	0.00	−0.03	0.09	0.06	0.00	0.14	−0.03	0.25
标准差/mGal	0.003	0.48	1.02	1.96	0.70	0.98	1.49	2.74	3.26	3.28	3.46	3.80

从图 1 和表 1 可看出,重力异常的估计误差随分辨率的降低和观测噪声的增加而增大,并且当数据分辨率较高时(如 $h=1$ km、2 km),观测噪声方差从 0 变化到 16.0 mGal² 所对应的重力异常估计误差的变化量较大,而当数据分辨率较低时(如 $h=4$ km),变化量却很小。上述结果初步表明,当数据分辨率较高时,观测噪声对估计精度占有主要的影响,但当数据分辨率降低到一定程度时,估计误差主要表现为数据采样不足引起的混叠误差,即使观测值精度有很大提高,其对估计结果的改善非常有限。

另外,根据式(16)计算了不同观测噪声和分辨率水平时估计结果的误差功率谱,如图 2 所示。从图 2 可知,在相同的数据分辨率水平下,估计误差的能量随观测噪声的增加而增大;而当观测噪声相同时,高分辨率观测值的估计误差主要集中在高频,且误差的能量较小,但随着数据分辨率的降低,误差逐渐向低频蔓延,误差的能量也随之增大。

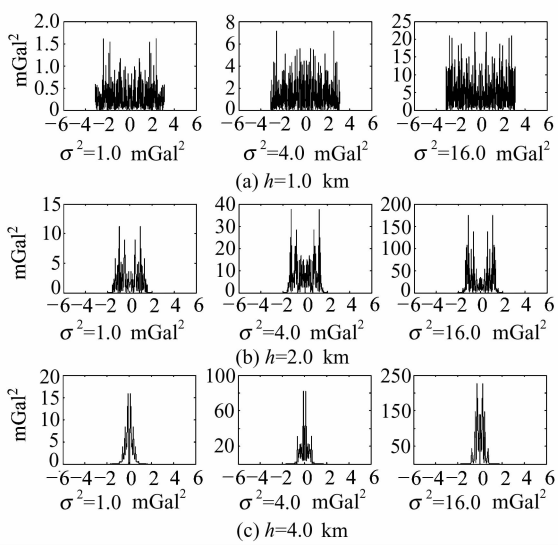

图 2　不同观测噪声和分辨率水平时估计结果的误差功率谱

Fig. 2　Error Power Spectra of Estimation Results at Different Noise and Resolution Levels

4 结 语

本文基于最小均方误差准则的频域形式，给出了顾及观测噪声和数据分辨率的最优线性估计及其误差功率谱的一般公式。这些公式可用于预估观测噪声和数据离散采样引起的估计误差，并为重力场精化中施测方案的优化设计提供参考。需要指出的是，本文的研究仅限于平面内数据为单输入/单输出的估计，其应用范围具有一定的局限。今后需要进一步将该理论扩展到球面(或椭球面)内，并能考虑数据为多输入/多输出的情况。

参 考 文 献

[1] 陈俊勇，李建成，宁津生，等. 全国及部分省市地区高精度、高分辨率大地水准面的研究及其实施[J]. 武汉大学学报·信息科学版，2006，31(4)：283-288

[2] Schwarz K P. Data Types and Their Spectral Properties[C]. Int Summer School Local Gravity Field Approximation, Beijing, 1984

[3] Sanso F. Talk on the Theoretical Foundations of Physical Geodesy[C]. The 19th IUGG General Assembly, Vancouver, 1987

[4] 陈俊勇. 给定内插高程异常值的精度时对GPS水准网格间距的考虑[J]. 测绘学报，2003，32(2)：130-133

[5] 张利明，李斐，陈武. 重力数据分辨率对GPS/重力边值问题的影响研究[J]. 武汉大学学报·信息科学版，2007，32(6)：523-526

[6] 孙风华，孔维兵，李慧智，等. 我国陆地均匀重力测量补点问题的研究[J]. 武汉大学学报·信息科学版，2001，26(4)：349-353

[7] Kotsakis C, Sideris M G. Aliasing Error Modelling in Single-input Single-output Linear Estimation Systems[C]. IAG International Symposium on Gravity, Geodesy and Geodynamics, Banff, 2000

[8] 汪海洪，罗志才，罗佳，等. 数据分辨率对最小二乘配置解的影响[J]. 大地测量与地球动力学，2006，26(4)：45-48

[9] 达吉思 D E，默塞里奥 R M. 多维数字信号处理[M]. 北京：科学出版社，1991

[10] Kotsakis C, Sideris M G. A Modified Wiener-type Filter for Geodetic Estimation Problems with Non-stationary Noise[J]. Journal of Geodesy, 2001, 75(12): 647-660

[11] Keller W. A Wavelet Approach to Non-stationary Collocation[C]//Schwarz. Geodesy Beyond 2000—The Challenges of the First Decade. Berlin: Springer-Verlag, 2000

第一作者简介：钟波，博士生。主要从事物理大地测量学与卫星重力学研究。

E-mail：Bellbo@sohu.com

Research on Linear Estimation Method Considering Observation Noise and Data Resolution

ZHONG Bo[1,2] *WANG Haihong*[1,2] *LUO Zhicai*[1,2] *CUI Lilu*[1]

(1 School of Geodesy and Geomatics, Wuhan University, 129 Luoyu Road, Wuhan 430079, China)

(2 Key Laboratory of Geospace Environment and Geodesy, Ministry of Education, Wuhan University, 129 Luoyu Road, Wuhan 430079, China)

Abstract: The estimation errors leading by the observation noise and the data resolution are discussed. The general formula of optimal linear estimation and its error power spectrum that considering observation noise and data resolution are given based on the frequency form of the least mean square error criterion. The example shows that the estimation results are mainly affected by measurement noises when the data resolution is high. However, the aliased errors because of discete sampling are dominated in the estimation results when the data resolution is lower at some degree. Improving the quality of observations has a little effect on the improvement of the accuracy of estimation results. The findings can be a reference for the scheme design of gravity data sampling.

Key words: observation noise; data resolution; mean-square-error criterion; error power spectrum; linear estimation

About the first author: ZHONG Bo, Ph. D candidate, majors in physical geodesy and satellite gravimetry.

E-mail: Bellbo@sohu.com